Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C / Didaktik der Mathematik

Masterthesis:

Übersetzung und didaktische Überlegungen zu
Leonhard Eulers Introductio in analysin infinitorum,
Band II: Appendix de superficiebus,
Kapitel 1: De lineis curvis in genere

(Pastell von Emanuel Handmann, 1753, Kunstmuseum Basel)

vorgelegt von: Eva Verbocket
Werlofeld 50
52525 Heinsberg
923238
evve@gmx.de

Prüfer: 1. Herr Prof. Dr. Klaus Volkert
2. Nina Friedrich

Abgabedatum: 22.10.2014

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung 3

2 Das Phänomen ‚Leonhard Euler‘ 5

3 *Introductio in analysin infinitorum* 8

3.1 Eulers Vorläufer 8

3.2 Ein Lehrbuch für viele Generationen von Mathematikern 13

4 *De lineis curvis in genere* 18

4.1 Über Kurven im Allgemeinen 19

4.2 Mathematischer Gehalt 27

4.3 Umsetzung in der Schule 38

4.3.1 Ablauf der Projektwoche 38

4.3.2 Übersicht über die einzelnen Stationen 42

5 Zusammenfassung 100

Literaturverzeichnis 102

Erklärung 105

1 Einleitung

„Leonhard Euler (1707-1783) war nicht nur der produktivste Mathematiker der Menschheitsgeschichte, sondern auch einer der größten Gelehrten seiner Zeiten."[1] – So beurteilt Fellmann die Verdienste des Mathematikers, der nahezu 900 Bücher und Abhandlungen und rund 3000 bekannte Briefe wissenschaftlichen Inhalts verfasste[2]. Wegen seiner enormen Leistungen waren Eulers Ansehen und sein Einfluss schon zu seinen Lebzeiten beeindruckend: Er gewann zwölf internationale Akademiepreise, wobei die acht Preise seiner Söhne *de facto* auch Euler zuzuschreiben sind. Wie sehr Eulers wissenschaftliche Ergebnisse geschätzt wurden, zeigt sich auch daran, dass ihm Louis XVI. für seine „zweite Schiffstheorie" 1000 Rubel schenkte und Katharina II. ihn sogar mit dem doppelten Betrag bedachte.[3] Da er in fast allen Zweigen der Wissenschaft und Technik seiner Zeit, in denen die Mathematik eine führende Rolle spielte – wie z.B. in der Mechanik, der Astronomie, der physikalischen Optik und der Demographie – fundamentale Resultate erzielte[4], galt er auch in den Augen der berühmten Mathematiker Leibnitz und Gauß als maßgebender Meister[5].
Doch auch mehr als 300 Jahren nach Eulers Geburt sind der Ruf und das Ansehen Eulers ungebrochen: Thiele bezeichnet den gebürtigen Baseler als „größten Mathematiker aller Zeiten"[6], und auch Kropp hält ihn für den „fruchtbarsten Mathematiker aller Zeiten"[7]. Gleichermaßen erkennt auch Knobloch Eulers Talent und seine Bereicherung für verschiedene Wissenschaften an, da er in ihm den „ideenreichsten Mathematiker" und einen der „größten Gelehrten aller Zeiten" sieht.[8] Da auch Fueter den Mathematiker als den „prominentesten Auslandsschweizer"[9] bezeichnet, verdienen Eulers Lehrbücher zu Recht die große Wertschätzung, die sie bei den nachfolgenden Mathematikergenerationen genossen haben. Zu den herausragenden Werken des Mathematikers zählen die Lehrbücher zur Analysis des Unendlichen (1748), zur Differential- (1755) und zur Integralrechnung (1768-1770), in denen Euler die jeweilige Theorie systematisch darstellt.[10] Im Rahmen dieser Masterarbeit soll der zweite Band der *Introductio in analysin infinitorum* in den Blickpunkt gerückt werden, da diesem bislang in der Forschung wenig Beachtung geschenkt wurde. Beispielsweise deklariert Spei-

[1] Fellmann, Beiträge zu Leben und Werk, 14.
[2] Ebd.
[3] Vgl. Ebd., 33.
[4] Vgl. Gelfond, 100.
[5] Vgl. Kropp, 149.
[6] Thiele, 7.
[7] Kropp, 149.
[8] Knobloch, VIII.
[9] Fueter, 2.
[10] Vgl. Lexikon der Mathematik, Bd. 2, 88.

ser den zweiten Teil des Werkes als „weniger reizvoll“[11] als den ersten, obwohl er doch eine Fülle genialer Einfälle enthalte und seine historische Wirkung groß gewesen sei. Dieses mangelnde Interesse der Forschung an dem zweiten Band der *Introductio* dürfte auch der Grund dafür sein, dass neben einer englischen und einer französischen Übersetzung keine aktuelle deutsche Übersetzung des zweiten Bandes vorliegt. Diesem Mangel soll in der vorliegenden Arbeit abgeholfen werden, da nach einer kurzen Übersicht über Eulers Leben und einer Einordnung des Lehrbuches in den historischen Kontext das erste Kapitel des zweiten Bandes *De lineis curvis in genere* ins Deutsche übersetzt wird. Zudem wird im Rahmen der vorliegenden Arbeit der mathematische Gehalt des übersetzen Kapitels herausgearbeitet und anschließend dargelegt, in welcher Form Eulers Text auch noch rund 265 Jahre nach seinem Erscheinen für Schülerinnen und Schüler zugänglich gemacht werden kann. Es wird das Konzept einer viertägigen Projektwoche vorgestellt, die sich mit ausgewählten Kapiteln von Eulers erstem Kapitel des zweiten Bandes der *Introductio* beschäftigt und sich an mathematisch und lateinisch interessierte Schülerinnen und Schüler richtet.

Ziel dieser Masterarbeit ist es somit zum einen, Neugierde und Interesse für den zweiten Band der *Introductio* zu wecken, dem in der Forschung bislang (zu) wenig Beachtung geschenkt worden ist. Zum anderen begibt man sich als Lehrkraft im Rahmen einer Projektwoche mit den teilnehmenden Schülerinnen und Schülern auf eine Reise ins achtzehnte Jahrhundert, die den Jugendlichen nicht nur Eulers Abhandlungen über die Anfänge des heutigen ‚Kartesischen Koordinatensystems‘, sondern auch das „Phänomen Euler“[12] näherbringen soll.

[11] Vgl. Speiser, XX.
[12] Fellmann, Beiträge zu Leben und Werk, 31.

2 Das Phänomen ‚Leonhard Euler'[13]

Bevor im folgenden Kapitel näher auf die *Introductio in analysin infinitorum* eingegangen wird, soll zunächst ein kurzer Überblick über den Lebenslauf ihres Autors gegeben werden. Dabei werden folgende Lebensphasen unterschieden:

1.) Jünglingsjahre in Basel (1707 bis 1727)
2.) Erster Aufenthalt in Petersburg (1727 bis 1741)
3.) Berliner Jahre (1741 bis 1766)
4.) Zweiter Aufenthalt in Petersburg (1766 bis 1783).

Leonhard Euler wurde am 15. April 1707 in Basel als Sohn des Pfarrers Paul Euler und seiner Frau Margareta Brucker geboren; jedoch verbrachte Leonhard seine Jugend in Riehen, da sein Vater 1708 als Pfarrer hierhin berufen worden war.[14] Die erste Einführung in die Mathematik empfing Euler von seinem Vater selbst, der daraufhin sein mathematisches Talent erkannte und ihm ein „mathematisches Privatissimum"[15] bei Jakob Bernoulli (1654 bis 1705) ermöglichte. Euler, der durchaus kein Wunderkind war, sich jedoch durch einen hartnäckigen, mit einem phänomenalen Gedächtnis gepaarten Arbeitswillen auszeichnete[16], wurde daraufhin von seinem Privatlehrer entdeckt, entscheidend gefördert, protegiert und – vor allem! – als ihm überlegen akzeptiert.[17] Bereits mit vierzehn Jahren immatrikulierte er sich an der Basler Universität und bewarb sich 1726 mit seiner Dissertation über den Schall um eine frei gewordene Physikprofessur, wobei er jedoch wegen seiner Jugend abgelehnt wurde.[18] Aus dieser Frühperiode in Eulers Schaffen stammen neben der erwähnten *Dissertatio physica de sono* auch die *Meditationes super problemate nautico*, die sich mit der Lösung des Problems der besten Schiffsbemastung beschäftigt.[19]

Im Jahre 1727 wurde er auf Geheiß Bernoullis an die Akademie der Wissenschaften in Petersburg vermittelt, wo er 1730 die Physikprofessur der Akademie und 1733 die Mathematikprofessur annahm.[20] In Petersburg lernte er auch seine zukünftige gleichaltrige Frau kennen, die er 1733 ehelichte; sie schenkte ihm dreizehn Kinder, von denen jedoch nur fünf das Säug-

[13] Vgl. Fellmann, Beiträge zu Leben und Werk, 31.
[14] Vgl. Fueter, 3.
[15] Ebd.
[16] Vgl. Fellmann, Beiträge zu Leben und Werk, 17.
[17] Vgl. Ebd., 20.
[18] Vgl. Fueter, 3.
[19] Vgl. Fellmann, Beiträge zu Leben und Werk , 21.
[20] Vgl. Fueter, 4 und Fellmann, Beiträge zu Leben und Werk, 25.

lingsalter überlebten.[21] In dieser ersten Petersburger Periode ist Eulers rein wissenschaftliche Produktion gewaltig: seine Abhandlungen machen Aufsehen und bringen ihm Weltruf; sein Ruhm steigt. „Er beginnt in diesen Jahren etwas ganz Neues, was vor ihm noch niemand in diesem Umfange unternommen hatte: Er schreibt umfangreiche, zusammenfassende Lehrbücher."[22] Bis zu seinem Weggang nach Berlin (1741) verfasste er in Petersburg allein an die hundert Arbeiten, darunter die 1736 gedruckte zweibändige Mechanik.[23] Seine enorme wissenschaftliche Produktion ist umso erstaunlicher, zumal er in dieser Zeit durch einen Abszess sein rechtes Auge verlor[24].

1741 folgte Euler dem Ruf Friedrichs II. und zog mit seiner Familie nach Berlin, wo er an der Berliner Akademie zwanzig Jahre lang als Direktor der mathematischen Klasse lehrte; nach dem Tod des Akademiepräsidenten Maupertuis oblag ihm sogar die Leitung der ganzen Akademie – zwar nicht nominell, jedoch substantiell.[25] In dieser Berliner Periode schrieb Euler die ersten beiden seiner drei zusammenfassenden Lehrbücher, die all die Gebiete thematisieren, die sich auf die Infinitisimalrechnung stützen: die Variationsrechnung sowie die berühmt gewordene zweibändige Introductio, die „Einführung in die Analysis des Unendlichen". Auch seine Überarbeitung samt mathematischer Kommentierung des Artilleriebuches New Principles of Gunnery von B. Rubins und sein Werk über das Schiffsingenieurwesen, *Scientia navalis*, stammen aus dieser Schaffensperiode.[26]

Wegen seines gestörten Verhältnisses zu Friedrich II. beschloss der Mathematiker die Berliner Akademie zu verlassen und wandte sich wieder Petersburg zu, wo er 1766 mit seiner Familie ankam. Während seines zweiten Aufenthalts in Petersburg wurde er von Katharina II. gefördert und unterstützt. Obwohl er an Altersstar litt, der auch nicht durch eine Operation im Jahre 1771 geheilt werden konnte, steigerte er seine wissenschaftliche Produktion ins Unvorstellbare.[27] Dass trotz dieser Erkrankung von Eulers rund 900 Abhandlungen und Büchern etwa die Hälfte – darunter auch sein drittes Lehrbuch über die Integralrechnung – aus der zweiten Petersburger Zeit von 1766 bis zu seinem Tod stammt, spricht für die gewaltige Gedächtniskraft des Mathematikers. Neben einem erstaunlichen Gedächtnis sei das „Phänomen Euler"[28] laut Fellmann an zwei weitere Faktoren gebunden: zum einen an eine gewaltige

[21] Vgl. Fueter, 5.
[22] Ebd.
[23] Vgl. Fellmann, Beiträge zu Leben und Werk, 25.
[24] Knobloch und Fellmann datieren dieses Ereignis auf das Jahr 1735; Fueter und Thiele auf das Jahr 1738.
[25] Vgl. Fueter, 16 und Fellmann, Beiträge zu Leben und Werk, 27.
[26] Vgl. Fellmann, Beiträge zu Leben und Werk, 26.
[27] Vgl. Fellmann, Beiträge zu Leben und Werk, 25 und Fueter, 17.
[28] Fellmann, Beiträge zu Leben und Werk, 31.

Konzentrationsfähigkeit und zum anderen an stete, ruhige Arbeit.[29] Erschüttert wurde Eulers Leben in seiner letzten Schaffensperiode jedoch durch den Tod seiner Ehefrau Katharina im Jahre 1773, mit der er rund vierzig Jahre zusammengelebt hatte.[30] Doch fand er in der Halbschwester seiner verstorbenen Frau, Salome Abigael Gsell, eine neue Lebensgefährtin, die er 1776 heiratete und auf deren Pflege und Fürsorge der erblindete Euler angewiesen war. Am 18. September 1783 erlitt der Mathematiker mitten in der Arbeit einen Schlaganfall, dem er nach wenigen Stunden erlag, und hinterließ den nachfolgenden Generationen ein unvorstellbar wertvolles Erbe für all die Wissenschaften, in denen Mathematik eine Rolle spielt.[31]
Trotz seines unfassbaren Talents berichten Eulers Zeitgenossen, dass der Basler sehr bescheiden und ein angenehmer Zeitgenosse gewesen sei. Er habe nie Prioritätshändel gekannt, sodass er zuweilen generös neue Entdeckungen und Erkenntnisse verschenkte: „Er gönnte jedem alles und freute sich stets auch an neuen Entdeckungen anderer."[32]. Seine Freunde rühmten ihn nicht nur für seinen Gerechtigkeitssinn sondern auch für seinen selbstlosen Charakter; dennoch konnte er leicht aufbrausen, wobei sein Zorn ebenso schnell wieder verschwand, wie er gekommen war.[33] Zudem war er unkompliziert, humorvoll und gesellig, kritisch und draufgängerisch und bewahrte sich zeitlebens seine strenge Religiosität, die er aus seinem Elternhaus mitgebracht hatte.[34]

An dieser Stelle sei darauf verwiesen, dass sowohl bei Fellmann als auch bei Fueter und Thiele ausführliche Zeittafeln über Eulers Lebenslauf zu finden sind, die einen detaillierten Überblick über seine Schaffensperioden, über seine Tätigkeiten an verschiedenen Akademien und über seine persönlichen Schicksalsschläge liefern, die sein Leben entschieden beeinflusst haben.[35]

---

[29] Vgl. Ebd.
[30] Vgl. Fueter, 17.
[31] Vgl. Ebd.
[32] Fellmann, Beiträge zu Leben und Werk, 27.
[33] Vgl. Fueter, 22.
[34] Vgl. Fellmann, Beiträge zu Leben und Werk, 21 und Fueter, 22.
[35] Vgl. Fellmann, L. Euler, 140 ff. und Fueter, 23 und Thiele, 174 ff..

3 *Introductio in analysin infinitorum*

Nach diesem kurzen Einblick in das Leben des Mathematikers soll im weiteren Verlauf der Masterarbeit sein Werk *Introductio in analysin infinitorum* im Mittelpunkt der Analysen stehen. Dabei wird in diesem Kapitel zunächst auf den historischen Kontext von Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen eingegangen und anschließend die Konzeption und Entstehung dieses zweibändigen Lehrbuches thematisiert. Neben einer Übersicht über Eulers Vorläufer und damit über all die Mathematiker, die sich ebenfalls mit der von Euler thematisierten Materie beschäftigten, sollen also auch die Bibliographie der *Introductio* und Eulers *Praefatio* thematisiert werden. Zudem wird auch der Frage nachgegangen, mit welchen Teilgebieten der Mathematik sich der jeweilige Band des Lehrbuches beschäftigt.

3.1 Eulers Vorläufer

Da Euler nicht der erste Mathematiker war, der sich mit dem Aufbau eines Koordinatensystems und der Beziehung zwischen Funktionsgraphen und Funktionsgleichungen beschäftigte, soll in diesem Kapitel ein Überblick über die Entstehung der Idee des Koordinatensystems gegeben werden. Bei dieser Entwicklung spielten besonders folgende Mathematiker eine zentrale Rolle:

1.) Apollonius von Perge (262? bis 190? v. Chr.)
2.) Oresme, Nicole (1323 bis 1382)
3.) René Descartes (1596 bis 1650) und
4.) Pierre Fermat (1601 bis 1665).[36]

Boyer stellt fest, dass die Arbeiten des Apollonius von Perge als „the first stage in mathematical development of coordinates“[37] interpretiert werden könnten. In seinem Hauptwerk ‘Conica‘, das aus acht Büchern besteht, systematisierte der griechische Mathematiker die Lehre von den Kegelschnitten.[38] Hier bediente sich Apollonius nicht nur der Bezeichnungen Ellipse, Parabel und Hyperbel, sondern zeigt in der 27. Proposition seines ersten Buches auch, dass

[36] Vgl. Kropp für Lebensdaten der Mathematiker.
[37] Boyer, 47.
[38] Vgl. Hofmann, Bd. 1, 47 und Kropp, 41.

jede Tangente und jeder Durchmesser im Schnittpunkt mit dem Kegelschnitt als sogenannte ‚schiefwinkeliges‘ Achsen bzw. als ‚schiefwinkeliges‘ Koordinatensystem verwendet werden können.[39] Auf diese Weise sieht er bestimmte Hilfslinien, die von einer gegebenen Figur oder einer Kurve bestimmt werden – wie etwa die Tangente oder den Durchmesser – als eine Art Koordinatenachsen an[40], wobei er jedoch keine negativen Werte auf den Achsen zulässt[41]. Dennoch stellt diese Konstruktion des Apollonius einen Vorläufer unseres heutigen Kartesischen Koordinatensystems dar, da bei ihm schon ein grundlegendes Verständnis von der Anordnung von Koordinatenachsen erkennbar wird. Obwohl Apollonius nicht als Erfinder der analytischen Geometrie angesehen werden darf, wird sein Werk – wie wir später sehen werden – entscheidend zur Entdeckung der analytischen Geometrie im 17. Jahrhundert beitragen.

Zwar taucht die Idee des Koordinatensystems auch in den frühen amtlichen Landvermessungskarten der Ägypter und in der Astronomie und der Geographie der Griechen auf, aber bis zur Zeit des Mittelalters wird die graphische Darstellung von veränderlichen Größen nicht mit der Vorstellung von Koordinaten in Verbindung gebracht.[42] Der französische Mathematiker, Naturphilosoph und Theologe Nicole Oresme ist es, der in diesen Zeiten die Entstehung des heutigen Koordinatensystems entscheidend vorantreibt. In seinem Werk *Latitudines formarum* beschreibt er bei der Berechnung der in diesen Traktaten geometrisch angedeuteten Zusammenhänge Bewegungen durch die Veränderung von Koordinaten.[43] Boyer sieht in der Arbeit von Oresme die zweite Stufe zur Entwicklung des Kartesischen Koordinatensystems, da der französische Mathematiker zunächst ein Koordinatensystem festlegt und anschließend die Punkte der Kurve unter Berücksichtigung dieser Konstruktion bestimmt. Auf diese Weise könne man bei Oresme „the earliest use of the graphical representation of functions on a coordinate system“[44] vorfinden. Diesbezüglich bemerken Coolidge und Youschkevitch, dass dieser Mathematiker des Mittelalters eine abhängige Variable, *Latitudo,* in Abhängigkeit von einer unabhängigen Variable, *Longitudo*, graphisch darstelle, wobei *Latitudo* mit dem modernen Begriff ‚Ordinate‘ und *Longitudo* mit ‚Abszisse‘ gleichzusetzen seien.[45] Diese in sein Koordinatensystem eingetragenen Punkte werden im Folgenden dann durch eine unterbrochene Linie verbunden, wobei Kurven bei Oresme nur in ein oder zwei Fällen auftreten.[46] Zudem findet sich bei ihm nirgends ein Anzeichen dafür, dass er die Vorstellung von einem kurven-

[39] Vgl. Coolidge, 122; Scriba & Schreiber, 71f. und Boyer, 23.
[40] Boyer, 47.
[41] Vgl. Ebd., 27.
[42] Vgl. Ebd., 28.
[43] Vgl. Hofmann, Bd. 1, 102f..
[44] Boyer, 46f.
[45] Vgl. Coolidge, 118 und Youschkevitch, 46f..
[46] Vgl. Coolidge, 118.

förmigen Graphen verinnerlicht hätte.[47] Aus diesem Grunde zeigt der französische Mathematiker Nicole Oresme zwar ein für seine Zeit beachtliches Verständnis von der allgemeinen Vorstellung einer Funktion und ihrer graphischen Darstellung, aber auch er ist – ähnlich wie Apollonius von Perge – eher als Wegbereiter denn als Erfinder der analytischen Geometrie zu betrachten.[48]

In der Zeit zwischen 1630 bis 1800 war die Anzahl der Gelehrten, die sich aus heutiger Sicht für die historische Entwicklung auf wesentliche Art und Weise mit der Mathematik beschäftigten, zahlenmäßig relativ klein. Jedoch standen sie durch Verbreitung ihrer Bücher, gedruckter Einzelschriften, durch wissenschaftliche Gesprächszirkel, gedruckte Arbeits- bzw. Sitzungsberichte der Akademien, Briefwechsel und private Besuche in Kontakt miteinander. Nicht so die beiden französischen Mathematiker René Descartes (1596-1650) und Pierre de Fermat (1601-1665), die den Ursprung der Koordinatenmethode nahezu gleichzeitig und im Wesentlichen unabhängig voneinander um 1637 begründeten.[49]

René Descartes, latinisiert als Renatus Cartesius, ein Philosoph, der aus einer alten normannischen Adelsfamilie stammt und in der Mathematik die Basis für rationale Vorgehen sieht[50], veröffentlichte 1637 sein Werk ‚La Geometrie'. Hier verwendet er als Hilfe dafür, geometrische Probleme zu lösen, einen Vorgänger der modernen Achsengeometrie. Zum einen geht er davon aus, dass jede Strecke durch eine Zahl repräsentiert werden kann; zum anderen arbeitet Descartes hinsichtlich der Koordinaten mit einer x-Achse positiver Abszissen.[51] Die ‚Ordinaten' sind Strecken, die schiefwinkelig oder orthogonal an die Abszissenachse angetragen werden, wobei er negative Ordinaten im Gegensatz zu negativen Abszissen anerkennt. Kropp stellt zudem fest, dass der französische Mathematiker bereits 1637 die bis heute gebräuchlichen Symbole und das Prinzip der analytischen Geometrie klar erfasst hatte:

> „Indem man der Strecke x der Reihe nach unendlich viele verschiedene Größen beilegt, erhält man auch unendliche viele für die Strecke y und auf diese Weise unendlich viele Punkte (...), mit deren Hilfe dann die gesuchte krumme Linie beschrieben werden kann."[52].

Als Vorlage für seine Geometrie diente Descartes dabei das siebte Buch der Sammlung des Pappos, der sich hier auf die Definition der Kegelschnitte des Apollonius beruft.[53] Seine

[47] Vgl. Coolidge, 118.
[48] Vgl. Ebd.
[49] Vgl. Scriba & Schreiber, 323f. und Youschkevitch, 52.
[50] Vgl. Hofmann, Bd. 2, 5 und Boyer, 74.
[51] Vgl. Kropp, 93 und Boyer, 86.
[52] René Descartes, zit. nach Kropp, 96.
[53] Vgl. Kropp, 94f.

Hauptleistung besteht darin, die Beziehungen zwischen der Algebra und der Geometrie von antiken Beschränkungen befreit und eine Möglichkeit gefunden zu haben, jede Kurve mithilfe der Achsengeometrie zu konstruieren.[54]

Descartes Zeitgenosse, Pierre der Fermat, war ein Anwalt, der sehr an den geometrischen Arbeiten der klassischen Antike interessiert war und durch das Ringen um die Methoden von Apollonius zur Koordinatengeometrie geführt wurde. [55] Schon 1629 hat der französische Anwalt das zweite Buch der *Loci plani* des Apollonius wiederhergestellt und aus den Werken der großen griechischen Mathematiker wie Apollonios Anregungen für arithmetische und analytische Probleme entnommen.[56] Gegen Ende 1636 verfällt Fermat – ähnlich wie Descartes, von dessen Arbeiten er damals noch nichts wusste, – auf die achsengeometrische Punktbestimmung in der Ebene unter häufiger Verwendung senkrechter Ordinaten.[57] Seine Gedanken zur analytischen Geometrie hält er in der 1636 entstandenen Schrift *Ad locos planos et solidos isagoge* fest, in der ‚ebene' (Gerade, Kreis) und ‚räumliche' (Kegelschnitte) geometrische Örter thematisiert werden.[58] Nach Fermat muss man Gleichungen in zwei Unbekannte (*quantitatives ignotae*) aufstellen – von Variabeln ist hier jedoch noch nicht die Rede; die erste Unbekannte, A, entspricht unserer Abszisse x und wird auf einer festen Achse von einem Nullpunkt aus abgetragen.[59] Fällt man dann – so Kropp – von einem (nicht auf der Abszissenachse liegenden) Kurvenpunkt das Lot auf die x-Achse, so erhält man die Ordinate (*ordinatim applicata*), y, von Fermat meist durch E bezeichnet. Jedoch legt Fermat in all seinen Arbeiten noch keine Ordinatenachse fest; er beschränkt seine Ausarbeitungen auf den – dem heutigen Verständnis nach – ersten Quadranten. Dies hat zur Folge, dass er das Bezugssystem nach Möglichkeit so anlegt, dass sowohl die Abszisse als auch die Ordinate positiv sind.[60] Da Fermats Abhandlung zur Koordinatenmethode erst im Jahre 1679 nach seinem Tode veröffentlicht worden ist und der französische Anwalt und Mathematiker nichts von Descartes' Arbeiten wusste, gelten die beiden Franzosen Descartes und Fermat als Erfinder der Achsengeometrie.[61] Uneinig ist die Forschung jedoch darin, welcher der beiden Mathematiker weitreichendere Ergebnisse in seinen Arbeiten lieferte. Coolidge geht davon aus, dass Descartes als Namensgeber des heutigen ‚Kartesischen Koordinatensystems' eine wichtigere Basis für die zukünftige Entwicklung der analytischen Geometrie schuf als seine griechischen Vorgänger

[54] Vgl. Coolidge, 128 und Scriba & Schreiber, 328.
[55] Vgl. Hofmann, Bd. 1, 50 und Boyer, 74.
[56] Vgl. Kropp, 89f..
[57] Vgl. Hofmann, Bd. 2, 21.
[58] Vgl. Ebd., 90.
[59] Vgl. Kropp, 90f..
[60] Vgl. Kropp, 91 und Boyer, 76.
[61] Vgl. Boyer, 82 und Hofmann, Bd. 2, 11.

oder sein Zeitgenosse Fermat.[62] Auch Kropp vertritt die Ansicht, dass Descartes mit Recht als Begründer der analytischen Geometrie angesehen wird, da Fermats Abhandlung erst nach seinem Tod und damit wesentlich später als Descartes Geometrie veröffentlicht wurde.[63] Im Gegensatz dazu vertreten Hofmann und Scriba und Schreiber die Theorie, dass von den kartesischen Koordinaten bei Descartes eher noch weniger zu finden sei als bei Fermat und dass das Wesen der analytischen Methode in der kurzen Abhandlung Fermats deutlicher hervortrete als bei seinem Konkurrenten.[64] Unabhängig davon, wem der beiden Mathematiker ein größeres Verdienst für die weitere Entwicklung der Achsengeometrie gebührt, bleibt festzuhalten, dass beide Mathematiker entschieden zum heutigen Verständnis des Kartesischen Koordinatensystems beitrugen. Ohne diese beiden Mathematiker des 17. Jahrhunderts wäre die Entstehung der analytischen Geometrie undenkbar.

Trotz ihrer großartigen Ergebnisse sprachen weder Descartes noch Fermat von einem „Koordinatensystem“[65]; vielmehr verwendete erst Gottfried Wilhelm Leibniz in einem Brief vom 27.08.1676 an Oldenburg die Begriffe ‚Abszisse‘, ‚Ordinate‘ und ‚Koordinate‘ (1692 in den *Acta eruditorum* erschienen).[66] Die beiden Brüder Jakob (I) und Johann (I) Bernoulli führten jedoch als erste die Bezeichnung der ‚cartesischen Koordinaten‘ ein und benannten damit das Koordinatensystem nach René Descartes, latinisiert Renatus *Cartesius*.[67] Erst bei Newton ist ein vollständiges Achsenkreuz (mit vier gleichberechtigten Quadranten) zu finden; auf diese Art und Weise benutzt er nicht nur ebene und (ansatzweise) räumliche kartesische Koordinaten in der noch heute üblichen Weise, sondern erkennt negative Koordinaten auch als völlig gleichberechtigt an.[68]

Trotz der oben aufgeführten Mathematiker, die sich alle auf ihre Art und Weise mit der Koordinatengeometrie auseinandersetzen, sei darauf verwiesen, dass es für Eulers Lehrbuch *Introductio in analysin infinitorum* keine direkten Vorläufer gab – weshalb Eulers Werk umso mehr Bewunderung verdient.[69] Zwar standen die fünf unter J. Bernoullis Leitung in den Jahren 1689 bis 1704 entstandenen Abhandlungen, *Positiones arithmeticae de seriebus infinitis earumque summa finita*, als mögliche Vorlage für Eulers *Introductio* zur Diskussion, wurden aber aufgrund der inhaltlichen Spannbreite von Eulers Werk als Vorlage verworfen.[70] Damit

[62] Vgl. Coolidge, 127.
[63] Vgl. Kropp, 89.
[64] Vgl. Hofmann, Bd. 2, 21f. und Scriba & Schreiber, 329.
[65] Vgl. Boyer, 76.
[66] Vgl. Scriba & Schreiber, 331 und Youschkevitch, 59.
[67] Vgl. Scriba & Schreiber, 331.
[68] Vgl. Kropp, 93 und Scriba & Schreiber, 332.
[69] Vgl. Krazer & Rudio, VIII.
[70] Vgl. Ebd., IX.

ist es gerade dieses Fehlen einer direkten Vorlage, das Eulers zweibändiges Lehrbuch so originell und unvergleichbar macht.

3.2 Ein Lehrbuch für viele Generationen von Mathematikern

Eulers zweibändiges Lehrbuch zur Einleitung in die Analysis des Unendlichen, das er während seines Aufenthalts in Berlin im Jahre 1745 verfasste, erschien 1748 in voller Ausstattung bei M. M. Bousquet in Lausanne. Bousquet hatte nämlich von Euler die Vollmacht erhalten, alle seine Schriften – ausgenommen diejenigen, welche er nach St. Petersburg zu schicken verpflichtet war – abzudrucken.[71]

Auf welche Art und Weise Euler Ordnung in das überlieferte Wissensgut brachte und das mathematisch Relevante systematisch gliederte, vermittelt er dem Leser in seiner *Praefatio*, die er dem ersten Band seiner *Introductio* voranstellte.

Bevor er auf die Einteilung seines Werkes in zwei Bände eingeht, legt Euler seine Absicht dar, ein leserfreundliches und vollständiges Buch für den an der Mathematik interessierten Nutzer zu verfassen. Hier wird bereits deutlich, dass die *Introductio* nach seinem Plan nicht bloß eine Monographie darstellen sollte, deren Studium das schöpferische Denken anregt und zu neuen Entdeckungen führt.[72] Vielmehr zielt der Basler darauf ab, ein Lehrbuch zu entwerfen, das einen pädagogischen Auftrag verfolgt: Es soll den Leser spielend in die schwierigsten Betrachtungen einführen, indem er an Eulers Entdeckungen, seiner Arbeitsweise und auch an seinen Fehlversuchen teilhaben darf.[73]

Nachdem Euler seine Intention klar formuliert hat, geht er auf seine Aufteilung des Lehrbuches in zwei Bände ein und ordnet dabei die beiden Bücher zunächst allgemeinen Themengebieten der Mathematik zu: der erste Band seines Werkes beschäftige sich mit der ‚Höheren Analysis' (*ad meram Analysin pertinent*[74]), wobei der zweite Band sich mit der Thematik auseinandersetzt, die man zu Eulers Zeiten als Anwendung der höheren Analysis auf die The-

[71] Vgl. Fueter, 12 und Kratzer & Rudio, VIIf.; eine ausführliche Bibliographie des Lehrbuches findet sich bei Kratzer & Rudio, XI.
[72] Vgl. Gelfond, 108.
[73] Vgl. Fueter, 13f.
[74] Krazer & Rudio, *Praefatio*, 7.

orie der Kurven und Flächen – der Geometrie – bezeichnet[75] (*quae ex Geometria sunt scitu necessaria, explicavi*[76]).[77]

Anschließend legt der Schweizer Mathematiker ausführlich die Inhalte beider Bücher dar und verfasst auf diese Art und Weise ein für den Leser nützliches Inhaltsverzeichnis. Im Folgenden soll allgemein auf die angeführten Themen eingegangen werden, wobei die verwendeten lateinischen Zitate aus Eulers *Praefatio* aus dem ersten Band entnommen sind.[78]

Der größte Teil des ersten Bandes der *Introductio*, der aus achtzehn Kapiteln besteht, ist der Theorie der elementaren Funktionen gewidmet einschließlich der Lehre von den unendlichen Reihen – wie Zahlenreihen, Potenzreihen, rekurrente Reihen und Kettenbrüche. Zudem skizziert Euler hier die analytische Theorie der trigonometrischen Funktionen. Um einen Überblick über die verschiedenen Kapitel des ersten Bandes zu erhalten, sind im Folgenden die lateinischen Kapitelbezeichnungen mit einer deutschen Übersetzung aufgelistet, die dem Vorwort des ersten Bandes entnommen sind[79]:

1. De functionibus in genere. (*Über Funktionen im Allgemeinen*)
2. De transformatione functionum. (*Über die Umformung von Funktionen*)
3. De transformatione functionum per substitutionem. *(Über die Umformung von Funktionen durch Substitution)*
4. De explicatione functionum per series infinitas. *(Über die Darstellung von Funktionen durch unendliche Reihen)*
5. De functionibus duarum pluriumve variabilium. (*Über die Funktionen zweier oder mehrerer Veränderlichen)*
6. De quantitatibus exponentialibus ac logarithmis. *(Über Exponentialgrößen und Logarithmen)*
7. De quantitatum exponentialium ac logarithmorum per series explicatione. *(Über die Darstellung von Exponentialgrößen und der Logarithmen durch Reihen)*
8. De quantitatibus transcendentibus ex circulo ortis. *(Über transzendente Zahlgrößen, die aus dem Kreis entspringen)*
9. De investigatione factorum trinomialium. *(Über die Aufsuchung trinomischer Faktoren)*

[75] Heute würde man vielleicht von Differentialgeometrie sprechen.
[76] Krazer & Rudio, *Praefatio*, 7.
[77] Vgl. Kratzer & Rudio, 7 und Fueter, 12 bzw. Boyer, 181.
[78] Vgl. Krazer & Rudio, 7-11.
[79] Vgl. Ebd., 1.

10. De usu factorum inventorum in definiendis summis serierum infinitarum. *(Über den Gebrauch der gefundenen Produkte zur Bestimmung der unendlichen Reihen durch Summen)*
11. De aliis arcuum atque sinuum expressionibus infinitis. *(Über andere unendliche Ausdrücke für die Bogen und Sinus)*
12. De reali functionum fractarum evolutione. *(Über die Entwicklung der gebrochenen Funktionen in reeller Form)*
13. De seriebus recurrentibus. *(Über die rekurrenten Reihen)*
14. De multiplicatione ac divisione angulorum. *(Über die Vervielfachung und Teilung von Winkeln)*
15. De seriebus ex evolutione factorum ortis. *(Über die Reihen, die der Entwicklung von Produkten entspringen)*
16. De partitione numerorum. *(Über die Zerlegung der Zahlen in Teile)*
17. De usu serierum recurrentium in radicibus aequationum indagandis. *(Über den Gebrauch der rekurrenten Reihen bei der Berechnung der Wurzeln der Gleichungen)*
18. De fractionibus continuis. *(Über Kettenbrüche)*

Der zweite Band der *Introductio*, der 22 Kapitel zzgl. sechs Kapitel Appendix umfasst, setzt sich vollständig mit der ‚höheren Geometrie' (*ad Geometriam sublimiorem*[80]) auseinander. Dabei werden zunächst Kurven allgemein thematisiert (*theoriam linearum curvarum in genere ita proposui*[81]), sodass die anschließenden Ausführungen auf jeden speziellen Kurventyp übertragen werden können. Zudem enthält der zweite Band die analytische Geometrie der Ebene einschließlich einer Kurvendiskussion und einer Übersicht über algebraische und transzendente Kurven. Des Weiteren beschäftigt sich Euler in diesem Band mit der analytischen Geometrie des Raumes einschließlich der Lehre von den Flächen zweiter Ordnung und der Behandlung von Raumkurven als Durchschnitt projizierender Zylinder. Die Descartessche Koordinatenmethode wird vollständig durchgearbeitet und auf den dreidimensionalen Raum ausgedehnt. Im Anhang findet sich erstmals die Einteilung der Flächen zweiten Grades in fünf Geschlechter sowie die Eulerschen Formeln zur Koordinatentransformation.
Im Folgenden wird eine Übersicht über alle Kapitel des zweiten Bandes der *Introductio* angeführt, die neben dem lateinischen Titel des jeweiligen Kapitels auch eine eigene deutsche

[80] Krazer & Rudio, *Praefatio*, 9.
[81] Ebd.

Übersetzung enthält. Die lateinischen Originaltitel stammen dabei aus dem Vorwort des zweiten Bandes[82]:

1. De lineis curvis in genere. *(Über Kurven im Allgemeinen)*
2. De coordinatarum permutatione. *(Über die Veränderung von Koordinaten)*
3. De linearum curvarum algebraicarum in ordines divisione. *(Über die Einteilung von algebraischen Kurven in Reihen)*
4. De linearum cujusque ordinis praecipuis proprietatibus. *(Über die besonderen Eigenschaften von Kurven beliebiger Ordnung)*
5. De lineis secundi ordinis. *(Über die Kurven zweiter Ordnung)*
6. De linearum secundi ordinis subdivisione in genera. *(Über die Unterteilung der Kurven zweiter Ordnung in Arten)*
7. De ramorum in infinitum excurrentium investigatione. *(Über die Aufsuchung von Zweigen[83], die ins Unendliche verlaufen)*
8. De lineis asymptotis. *(Über Asymptoten)*
9. De linearum tertii ordinis subdivisione in species. *(Über die Unterteilung der Kurven dritter Ordnung in Arten)*
10. De praecipuis linearum tertii ordinis proprietatibus. *(Über die besonderen Eigenschaften der Kurven dritter Ordnung)*
11. De lineis quarti ordinis. *(Über die Kurven vierter Ordnung)*
12. De investigatione figurae linearum curvarum. *(Über die Aufsuchung der Gestalten von Kurven)*
13. De affectionibus linearum curvarum. *(Über die Anordnung/ Eigenschaft von Kurven)*
14. De curvatura linearum curvarum. *(Über die Krümmung von Kurven)*
15. De curvis una pluribusve diametris praeditis. *(Über Kurven mit einem oder mehreren Durchmessern)*
16. De inventione curvarum ex datis applicatarum proprietatibus. *(Über das Auffinden von Kurven aus den Eigenschaften der Applikaten)*
17. De inventione curvarum ex aliis proprietatibus. *(Über das Auffinden von Kurven aus anderen Eigenschaften)*
18. De similitudine et affinitate linearum curvarum. *(Über die Ähnlichkeit und die Affinität[84] von Kurven)*

[82] Vgl. Speiser, 1.
[83] Gemeint sind die ‚Zweige' von Kurven.
[84] Diese Bezeichnung ist nach Euler zu einem *Terminus technicus* geworden.

19. De intersectione curvarum. *(Über die Schnitte von Kurven)*
20. De constructione aequationum. *(Über die Konstruktion von Gleichungen)*
21. De lineis curvis transcendentibus. *(Über transzendente Kurven)*
22. Solutio nonnullorum problematum ad circulum pertinentium. *(Über die Lösung einiger Probleme, die sich auf den Kreis beziehen)*

Appendix

1. De superficiebus corporum in genere. *(Über die Oberfläche von Körpern im Allgemeinen)*
2. De sectionibus superficierum a planis quibuscunque factis. *(Über den Schnitt von Flächen und beliebigen Ebenen)*
3. De sectionibus cylindri, coni et globi. *(Über den Schnitt von Zylindern, Kegeln und Kugeln)*
4. De immutatione coordinatum. *(Über die Veränderung von Koordinaten)*
5. De superficiebus secundi ordinis. *(Über die Flächen zweiter Ordnung)*
6. De superficierum intersectione mutua. *(Über die Schnittmenge zweier Flächen)*

Auffällig an dieser Einteilung der Kapitel ist, dass Euler jedem Band zunächst ein allgemeines Kapitel voranstellt, in dem er die Grundlagen für die folgenden Kapitel zunächst im Allgemeinen behandelt: so werden dem Leser im ersten Kapitel des ersten Bandes ein fundamentales Wissen über Funktionen (*De functionibus in genere*) und im ersten Kapitel des zweiten Bandes prinzipielle Informationen über Kurven (*De lineis curvis in genere*) vermittelt. Selbst im *Appendix* des zweiten Bandes beginnt Euler damit, sich zunächst allgemein mit den Oberflächen von beliebigen Körpern auseinanderzusetzen (*De superficiebus corporum in genere*). Diese Systematik Eulers unterstreicht zudem den pädagogischen Nutzen und den bereits erwähnten didaktischen Auftrag seines Werkes, das nicht einfach eine Abhandlung, sondern vielmehr ein Lehrbuch für diejenigen Leser sein sollte, die sich in verschiedene Teilgebiete der Mathematik weiterbilden wollten. Diese didaktische Intention seiner Schrift wird auch dadurch bestätigt, dass Euler „die Fertigkeit, welche der Infinitesimalkalkül den Mathematikern gegeben hatte, an seinem Vorhof“[85] testet. Er lässt also seine damaligen Schüler mit seinem neuen Lehrbuch arbeiten und konnte auf diese Weise den Nutzen seiner Schrift überprüfen, wobei dieses Experiment glückte und erfolgreiche Resultate erzielte.

[85] Speiser, VII.

Am Ende seiner *Praefatio* entschuldigt sich Euler dafür, nicht all die Mathematiker angegeben zu haben, deren Ideen und Ergebnisse er in seinen Ausarbeitungen verwendet hat. Dies begründet er damit, dass eine ausführliche Auseinandersetzung mit dem historischen Kontext den Rahmen des *Introductio* gesprengt hätte (*Cum enim mihi propositum esset omnia quam brevissime pertractare, historia cuiusque problematis magnitudinem operis non mediocriter auxisset.*[86]). Zudem hofft der Mathematiker, dass die meisten, die sich mit seiner Einleitung in die Analysis des Unendlichen auseinandersetzen werden, das Studium seiner Ergebnisse erfreut und für sie gewinnbringend sein wird (*plerisque, qui hoc studio delectantur, non ingrata esse futura*[87]). Auch an dieser Einleitung seines Lehrbuches wird erneut die Bescheidenheit des Baslers deutlich, der – wie bereits erwähnt – einen selbstlosen und gütigen Charakter gehabt haben soll und seine Leser gerne an seinen Forschungen teilhaben ließ.

Seine eigene Meinung zu diesem Buch äußerte Euler bereits in einem Brief an Goldbach vom 4. Juli 1744, sodass die Vermutung naheliegt, dass der Mathematiker die *Introductio* bereits vor 1748 verfasste. In diesem Brief bezeichnet Euler sein Werk als „*Prodomus ad Analysin infinitorum*“ [88], also als Eilboten für die Analysis im Unendlichen. Trotz aller Bescheidenheit verfügte er also auch über ein Selbstbewusstsein, das ihn den großen Nutzen der *Introductio* für die kommenden Mathematikergenerationen erkennen lässt.

4. *De lineis curvis in genere*

Nach diesen allgemeinen Informationen zu den beiden Bänden der *Introductio* soll im Folgenden näher auf das erste Kapitel des zweiten Bandes, *De lineis curvis in genere*, eingegangen werden. Wie bereits erwähnt, handelt es sich bei dabei um eine Art Einleitung in die Themen des zweiten Bandes: also um die Kurven im Allgemeinen. Neben einer Übersetzung sollen auch der mathematische Gehalt dieses Kapitels analysiert und anschließend verschiedene didaktische Überlegungen für die Umsetzung dieses lateinischen Textes – rund 265 Jahre nach seinem Erscheinen – in der Schule angeführt werden.

---

[86] Krazer & Rudio, *Praefatio*, 11.
[87] Ebd.
[88] Fellmann, L. Euler, 69.

4.1 Über Kurven im Allgemeinen

Da eine ausführliche Bibliographie der *Introductio* dem Vorwort des ersten Bandes entnommen werden kann, sei hier lediglich darauf verwiesen, dass die verwendeten Zeichnungen dem lateinischen Originaltext aus der Auflage von Speiser entnommen worden sind. Zudem wurden bei der Übersetzung zum einen die englische Übersetzung ‚Introduction to Analysis of the Infinite – Book II‘ von Blanton und zum anderen die französische Übersetzung ‚Introduction a l’analyse infinitésimale – Tome second‘ von Labey zu Rate gezogen.

<u>Übersetzung von L. Eulers Introductio in analysin infinitorum – Band II, Kapitel 1</u>

Kapitel 1

Über Kurven im Allgemeinen

1. Im Allgemeinen wird eine veränderliche Größe als eine Größe betrachtet, die alle bestimmten Größen beinhaltet. In der Geometrie wird eine derartige veränderliche Größe durch die gerade, unendliche Linie RS (Fig. 1) veranschaulicht. Da es nämlich erlaubt ist, bei einer unendlichen Geraden eine beliebige begrenzte Strecke von wohlbestimmter Größe abzuschneiden, bietet diese Gerade dem Geist dieselbe Vorstellung an wie eine veränderliche Größe. Zuerst muss also auf der unendlichen Geraden RS ein Punkt A[89] gewählt werden, von wo aus die begrenzte abzuschneidende Größe ihren Anfang nehmen soll; so wird jede Strecke AP einen endlichen Wert veranschaulichen, der in der veränderlichen Größe enthalten ist.

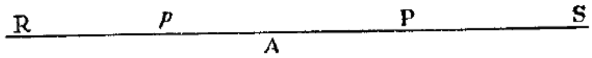


Fig. 1

2. Sei also x eine veränderliche Größe, die durch die unendliche Gerade RS veranschaulicht wird. Dann ist es deutlich, dass alle bestimmten Werte von x (selbst)[90], die allerdings alle reell sind, durch auf der Geraden RS abzuschneidende Teile wiedergegeben werden können. Ist der Punkt P identisch mit dem Punkt A, so wird das verschwindende Intervall den Wert $x = 0$

[89] An dieser Stelle sei darauf verwiesen, dass Euler die Buchstaben keineswegs immer eindeutig verwendet, wie es z.B. bei dem Buchstaben M später der Fall sein wird.

[90] Euler verwendet in Verbindung mit x und y stets eine Form von *ipse* („selbst“; meist den Genitiv Singular *ipsius*) vermutlich um den Kasus des x oder y zu verdeutlichen. In der deutschen Übersetzung soll dieser Genitiv Singular *ipsius* jedoch nicht wiedergegeben werden.

wiedergeben; je mehr aber der Punkt P von A wegbewegt wird, umso größer wird der bestimmte Wert von x, der durch das Intervall AP wiedergegeben werden wird.

Diese Intervalle AP aber werden Abszissen genannt.

So stellen die Abszissen die bestimmten Werte der Veränderlichen x dar.

3. Weil aber die unendliche Gerade RS auf beiden Seiten von A ins Unendliche verläuft, können auch von beiden Seiten alle Werte von x abgeschnitten werden. Wenn wir aber nun die positiven Werte von x durch das Fortschreiten rechts von A abschneiden werden, werden die Intervalle AP, die links abgetrennt worden sind, negative Werte für x liefern. Umso weiter der Punkt P nach rechts von A wegbewegt wird, umso größer wird der Wert von x, der durch das Intervall AP angezeigt wird. Umso mehr der Punkt P nach links bewegt wird, umso kleiner wird der Wert von x, und wenn P zu A gelangen sollte, möge $x = 0$ sein. Wohingegen die Werte von x kleiner als Null werden, das heißt negativ, wenn P weiter nach links von A wegbewegt werden sollte.[91] Deshalb sind die Intervalle AP, die links von A abgetrennt worden sind, negative Werte von x, da ja die Intervalle AP, die rechts weggenommen worden sind, positive Werte angeben sollen. Willkürlich aber ist, welche Seite dazu ausgewählt wurde, positive Werte von x darzustellen: entsprechend wird die entgegengesetzte Seite immer die negativen Werte von x darstellen.

4. Wenn also die unendliche Gerade die Variable x wiedergibt, möchten wir sehen, wie eine beliebige Funktion von x möglichst passend geometrisch dargestellt werden kann. Sei y eine beliebige Funktion von x,

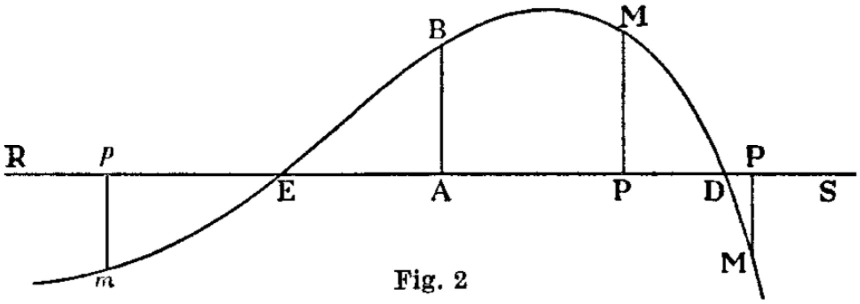


Fig. 2

sodass y also einen bestimmten Wert annimmt, wenn für x ein begrenzter Wert eingesetzt wird. Nachdem die unendliche Gerade RAS (Fig. 2) ausgewählt worden ist, um die Werte von x anzuzeigen, wird für jeden beliebigen Wert von x das entsprechende Intervall AP festgelegt und (dann) die Senkrechte zu AP der Länge PM errichtet, was dem Wert von y entspricht. Ist der Wert von y positiv, dann soll PM oberhalb der Geraden RS liegen, wenn aber der Wert von y negativ ist, soll die Senkrechte (bzw. PM) unterhalb der Geraden RS liegen. Nachdem

[91] Obwohl diese Formulierungen den Eindruck erwecken, den Unterschied zwischen positiven und negativen x-Werten mehrmals zu beschreiben, lassen sich diese Darlegungen auf ebendiese Art und Weise im lateinischen Originaltext finden.

die positiven Werte von y oberhalb der Geraden RS angeordnet worden sind, liegt für $y = 0$ der Wert von y auf der Geraden RS und für negative Werte von y unterhalb der Geraden RS.

5. Die Figur (zwei) stellt also y als Funktion von x dar; macht man in ihr $x = 0$, so ergibt sich ein positiver Wert = AB; nimmt man x $= AP$, so erhält man $y = PM$. Für $x = AD$ wird $y = 0$ und für $x = Ap$ nimmt die Funktion einen negativen Wert an. Folglich liegt die Senkrechte pM dann unterhalb der Geraden RS. Analog werden auch die Werte von y, welche zu negativen Werten für x gehören, durch Senkrechte dargestellt. Diese liegen oberhalb von RS, falls sie positiv sind; im entgegengesetzten Fall müssen sie – wie pm – unterhalb der Geraden RS angeordnet werden. Sollte sich jedoch für irgendeinen Wert von x, wie beispielsweise $x = AE$, $y = 0$ ergeben, so wird die Länge der Senkrechten Null.

6. Wenn also auf diese Weise für alle endlichen Werte von x die entsprechenden Werte von y bestimmt werden, werden zu den einzelnen Punkten P, die auf der Geraden RS liegen, die Senkrechten PM errichtet, die die Funktionswerte y angeben. Diese Senkrechten PM schneiden unterschiedliche Abschnitte P auf der Geraden RS ab (= mit verschiedenen Punkten M für verschiedene Punkte P). Dabei werden die Punkte M oberhalb der Geraden RS liegen, falls die Werte von y positiv sind, oder unterhalb von der Geraden RS, falls die Werte von y negativ sind, oder auch auf der Geraden RS, falls $y = 0$, wie es bei den Punkten D und E geschieht. Alle diese einzelnen Endpunkte M der Senkrechten werden eine Linie[92] bilden, sei es eine Gerade oder sei es eine Kurve, die also so durch die Funktion y bestimmt wird. Aus diesem Grunde wird jede beliebige Funktion von x, die auf diese Art und Weise in die Geometrie übertragen worden ist, eine gewisse Linie – sei es eine Gerade oder eine Kurve – festlegen, deren Gestalt von der Natur der Funktion f abhängen wird.

7. Demnach ist die Kurve, die sich aus der Funktion y ergibt, vollständig bekannt, da ja alle ihre Punkte durch die Funktion y festgelegt werden; für alle einzelnen Punkte P steht nämlich die Länge der Senkrechten PM fest, deren Endpunkt M auf der Kurve liegt, und so werden alle Punkte der Kurve gefunden. Wie auch immer die Kurve bestimmt wird, von ihren einzelnen Punkten können Senkrechte auf die Geraden RS errichtet werden. So erhält man Intervalle AP, die die Werte für ein endliches x angeben, und Längen der Senkrechten PM, die die Funktionswerte y wiedergeben. Infolgedessen gibt es keinen Punkt auf der Kurve, der nicht auf diese Weise durch die Funktion y bestimmt wird.

[92] Euler verwendet die Bezeichnung ‚Linie' als Oberbegriff für (gekrümmte) ‚Kurven' und ‚Geraden'.

8. Obwohl ziemlich viele Kurven durch eine stetige Bewegung eines Punktes mechanisch beschrieben werden können und sich auf diese Weise zugleich eine vollständige Kurve den Augen darbietet, werden wir hier hauptsächlich solche Kurven beachten, die von Funktionen abstammen, weil diese geeigneter für analytischen Umgang und passender für Rechnungen sind. Jede beliebige Funktion von x wird also irgendeine Linie liefern – sei es eine Gerade oder eine Kurve -, weshalb es ebenfalls erlaubt sein wird, zu den Linien eine Funktionsgleichung zu bilden. Also wird die Gestalt dieser Linien durch eine derartige Funktion von x ausgedrückt, die immer die wahre Länge der Senkrechten MP anzeigen soll, während die Intervalle AP, welche zu den Senkrechten MP aus den einzelnen Punkten M der Kurve auf die Geraden RS gehören, durch veränderliche x angezeigt werden. (= Also wird die Gestalt jeder Kurve durch eine Funktion von x ausgedrückt. Diese ist dadurch festgelegt, dass das Lot, das aus dem Punkt M auf die Gerade RS gefällt wird, wobei P den Ausgangspunkt darstellt, der auf der Geraden RS liegt, diese Funktion darstellt. Also gibt die Länge des Intervalls AP den Wert von x und die Länge der Senkrechten PM den entsprechenden Funktionswert an.)

9. Aus diesem Verständnis von Kurven folgt sofort die Unterscheidung von stetigen[93], unstetigen sowie gemischten Kurven. Das heißt, die Gestalt einer stetigen Kurve wird durch eine einzige Funktion von x festgelegt werden. Wenn aber eine Kurve so aufgebaut ist, dass verschiedene Teile von ihr, wie BM, MD, DM etc., durch verschiedene Funktionen von x ausgedrückt werden, sodass, nachdem gemäß einer Funktion der Teil BM bestimmt worden ist, dann gemäß einer anderen Funktion der Teil MD beschrieben wird, so nennen wir derartige Kurven unstetig oder gemischt oder irregulär. Dies liegt daran, dass sie nicht von einer einzigen konstanten Vorschrift beschrieben, sondern aus Teilen verschiedener stetiger Kurven zusammengesetzt werden.

10. In der Geometrie aber werden hauptsächlich stetige Kurven thematisiert. Im Folgenden soll gezeigt werden, dass ebendiese Kurven, die durch eine einfache Bewegung gemäß einer gewissen unveränderlichen Regel mechanisch beschrieben werden, auch durch eine einzige Funktion ausgedrückt werden können und deshalb stetig sind. Sei also mEBMDM eine stetige Kurve, deren Gestalt irgendeine Funktion von x beinhaltet, welche wir y nennen. Es steht fest, dass, wenn wir endliche Werte von x auf der Geraden RS von dem festgelegten Punkt A aus abtragen, dann die entsprechenden Werte von y die Längen der Senkrechten PM angeben.

[93] Bei Euler bezieht sich ‚stetig' immer auf Kurven und nicht auf Funktionen.

11. Bei unseren Erklärungen zu Kurven sollten gewisse Bezeichnungen festgehalten werden, von denen in der Lehre der Kurven sehr oft Gebrauch gemacht wird.

Zuerst also wird die Gerade RS, von der die Werte von x abgeschnitten werden, Achse oder Direktrix genannt.[94]

Der Punkt A, von dem die Werte für x abgetragen werden, wird der Ursprung der Abszissen genannt. (Koordinatenursprung)

Die Teile der Achse AP jedoch, die die endlichen Werte von x wiedergeben, werden Abszissen genannt (x-Koordinaten).

Die Senkrechten PM, die sich vom Ausgangspunkt P bis zur Kurve erstrecken, erhielten den Namen Applikaten[95].

In diesem Fall werden sie normale oder orthogonale Applikaten genannt, weil sie ja mit der Achse einen rechten Winkel bilden; wenn aber in ähnlicher Art und Weise die Applikaten PM einen schiefen Winkel mit der Achse bilden können, werden sie schiefe Applikaten genannt. Wir werden hier immer die Gestalt der Kurven durch senkrechte Applikaten beschreiben, außer es wird ausdrücklich das Gegenteil angegeben.

12. Wenn also irgendeine Abszisse AP durch die Variable x dargestellt wird, sodass $AP = x$, dann wird der Funktionswert y die Länge der Applikate PM angeben, und es wird gelten $PM = y$. Die Gestalt der Kurve, angenommen sie sei stetig, wird also von der Gestalt der Funktion y abhängen – das heißt von der Art und Weise, wie irgendein y aus x und aus irgendwelchen Konstanten zusammengesetzt wird. Auf der Achse PS wird also der Teil AS der Ort für positive Abszissen, der Teil AR für negative Abszissen sein; dann aber wird oberhalb der Achse RS eine Gegend von positiven Applikaten, unterhalb der Achse RS aber die Gegend für negative Applikaten sein.[96]

13. Wenn also aus jeder beliebigen Funktion von x eine stetige Kurve entsteht, wird auch durch letztere jene Funktion erkannt und beschrieben werden. Zuerst nämlich sollen die positiven Werte von x von 0 bis ∞ erfolgreich zugeteilt und für die einzelnen Werte entsprechen-

[94] Entspricht dem modernen Begriff „x-Achse“ oder „Abszissenachse“.
[95] Eulers Bezeichnung ‚Applikate‘ entspricht dem modernen Begriff ‚Ordinate‘. Jedoch soll hier die Bezeichnung ‚Applikate‘ beibehalten werden, da Euler den Begriff ‚Ordinate‘ für ein anderes mathematisches Objekt verwendet.
[96] In diesem und im folgenden Paragraphen wird also der Punkt A als Koordinatenursprung betrachtet.

de Funktionswerte y gesucht werden, die durch die Applikaten entweder oberhalb oder unterhalb (der Achse) wiedergegeben werden – je nachdem, ob die Werte entweder positiv oder negativ sind; so wird der Teil der Kurve BMM entstehen. Als nächstes sollen auf ähnliche Art und Weise alle negativen Werte von x von 0 bis -∞ zugeteilt werden, und die entsprechenden Werte von y werden den Teil der Kurve BEm bestimmen, und so wird die gesamte Kurve, die in der Funktion enthalten ist, dargestellt werden.

14. Weil y die Funktion von x ist, wird entweder y eine explizite Funktion von x sein, oder es ist eine Gleichung in x und y gegeben, wodurch y durch x bestimmt wird: in beiden Fällen wird eine Gleichung entstehen, die die Gestalt der Kurve ausdrücken wird. Deswegen wird die Gestalt einer beliebigen Kurve durch eine Gleichung zwischen zwei Variabeln x und y festgelegt. Dabei gibt die eine Variable x die Abszissen an, die auf der Achse liegen und den Punkt A als Ausgangspunkt haben, und die andere Variable y gibt die zu der Achse senkrecht stehenden Applikaten an. Die Abszissen und die Applikaten jedoch werden zusammen betrachtet orthogonale Koordinaten genannt; infolgedessen soll die Gestalt der Kurve durch die Gleichung zwischen den orthogonalen Koordinaten definiert werden, vorausgesetzt die Gleichung definiert y als eine Funktion von x.

15. Da wir die Kenntnisse über Kurven auf Wissen über Funktionen zurückgeführt haben, gibt es so viele verschiedene Arten von Kurven, wie wir oben[97] verschiedene Arten von Funktionen gesehen haben. Aus diesem Grund erscheint es also sinnvoll, zwischen algebraischen und transzendenten Kurven zu unterscheiden. Eine Kurve sei algebraisch, wenn die Applikate y eine algebraische Funktion der Abszisse x ist; oder wenn die Gestalt der Kurve durch eine algebraische Gleichung zwischen den Koordinaten x und y ausgedrückt wird. Diese Art von Kurven wird gewöhnlich auch geometrische genannt. Eine Kurve ist dagegen dann transzendent, wenn ihre Gestalt durch eine transzendente Gleichung zwischen x und y ausgedrückt wird, das heißt, dass y eine transzendente Funktion von x wird. Das ist die grundlegende Unterscheidung bei stetigen Kurven, wobei diese entweder algebraisch oder transzendent sind.

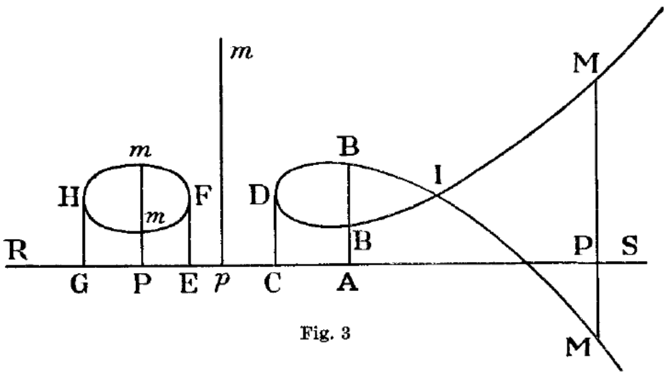
16. Um aber die Kurve zu einer gegebenen Funktion von x, durch die die Applikate y ausgedrückt wird, beschreiben zu können, muss insbesondere beachtet werden, ob die Natur der Funktion entweder einwertig oder aber mehrwertig ist.[98] Als erstes setzen wir voraus, dass y

[97] Vgl. *Introductio* Band 1, Kapitel 1, Paragraph 7: „*Functiones dividuntur in algebraicas et transcendentes; illae sunt, quae componuntur per operationes algebraicas solas; hae vero, in quibus operationes transcendentes sunt*.“.

[98] In der heutigen Analysis werden jedoch nur einwertige Funktionen behandelt.

eine einwertige Funktion von x ist, also $y = P$ sei, wobei P irgendeine einwertige Funktion von x beschreibt. Für jeden beliebigen Wert von x hat auch die Applikate y einen einzigen bestimmten Wert. Jeder einzelnen Abszisse wird eine einzige Applikate zugeordnet werden, und deswegen wird die Kurve folgendermaßen beschaffen sein: Trägt man von einem beliebigen Punkt P auf der Achse RS die Applikate PM ab, so wird diese die Kurve immer nur in einem einzigen Punkt M schneiden. Also werden den einzelnen Punkten auf der Achse einzelne Punkte auf der Kurve zugeordnet werden; weil die Achse auf beiden Seiten ins Unendliche verläuft, wird auch die Kurve auf beiden Seiten ins Unendliche laufen. Die Kurve, die aus einer derartigen Funktion entstanden ist, wird sich in einem stetigen Verlauf auf beiden Seiten mit der Achse ins Unendliche erstrecken, wie die Figur 2 zeigt, wo die Kurve mEBMDM beiderseits ohne irgendeine Unterbrechung ins Unendliche verläuft.

17. Sei y eine zweiwertige Funktion von x, seien also P und Q beides einwertige Funktionen von x, und sei $yy = 2Py - Q$, sodass $y = P \pm \sqrt{PP - Q}$. Also werden jeder einzelnen Abszisse x zwei Applikaten y zugeordnet, beide entweder reell oder komplex, wobei y für $PP > Q$ reell und für $PP < Q$ komplex ist. Solange also beide Werte von y reell sind, werden der Abszisse AP zwei Applikaten PM, PM zugeordnet werden (Fig. 3), sodass die Senkrechte zu der Achse im Punkt P die Kurve in zwei Punkten M und M treffen wird. Sobald aber $PP < Q$ gilt, wird die Abszisse x dort keinen Koordinaten zugeordnet werden; die Senkrechte zu der Achse wird in diesen Punkten niemals die Kurve schneiden, wie das bei Punkt p in Figur 3 der Fall ist. Aber falls vorher $PP > Q$ gegolten hätte, hätte nicht $PP < Q$ gelten können, außer für den Fall $PP = Q$, der die Grenze zwischen reellen und komplexen Applikaten darstellt. Sobald also die reellen Applikaten verschwinden, wie in C oder G, gilt dort $y = P \pm 0$, und beide Applikaten sind gleich, sodass sich dort die Kurve zurückbiegt.



18. In Figur 3 wird deutlich, dass, solange die Abszisse negativ ist und x zwischen den Grenzen AC und AE liegt, die Applikate komplex ist, und es gilt $PP < Q$; links neben E werden die Applikate wieder reell, was nicht geschehen kann, außer in E gilt $PP = Q$, weshalb beide Applikaten gleich sind. Dann wieder werden den Abszissen AP zwei Applikaten Pm, Pm zugeordnet, solange bis wir zu G kommen, wo diese beiden Applikaten gleich werden. Links von G werden sie schließlich imaginär. Auf diese Art und Weise kann eine Kurve aus zwei

voneinander getrennten Teilen, wie MBDBM und FmHm, oder aus mehreren Teilen bestehen. Dennoch müssen diese Teile als zusammengehörig betrachtet und somit als eine einzige stetige oder reguläre Kurve angesehen werden, weil diese einzelnen Teile aus ein und derselben Funktion hervorgehen. Diese Kurven haben also die Eigenschaft, dass, wenn in einzelnen Punkten der Achse die Senkrechten MM gebildet werden, diese immer die Kurve entweder gar nicht oder in zwei Punkten schneiden; außer die zwei Punkte fallen zusammen, wie das bei den Applikaten in den Punkten D, F, H und I der Fall ist.

19. Wenn x eine dreiwertige Funktion von x ist, oder wenn y durch eine Gleichung der Form $y^3 - Py^2 + Qy - R = 0$ definiert wird, wobei P, Q und R einwertige Funktionen von x sind, dann wird für einen beliebigen Wert von x die Applikate y drei Werte haben, die entweder alle reell sind, oder nur einer ist reell und die anderen beiden sind komplex. Alle Applikaten werden infolgedessen die Kurve entweder in drei Schnittpunkten schneiden oder nur in einem einzigen, außer wenn zwei oder auch drei Schnittpunkte identisch sind. Wenn also jeder einzelnen Abszisse wenigstens eine reelle Applikate zugeordnet werden kann, ist es notwendig, dass die Kurve auf beiden Seiten mit der Achse ins Unendliche verläuft. Also besteht die Kurve entweder aus einem einzigen stetigen Teil, wie in Figur 4, oder aus zwei voneinander getrennten Teilen, wie in Figur 5, oder aus einer größeren Anzahl von Teilen, die dennoch alle zusammen gehören und dieselbe stetige Kurve bilden.

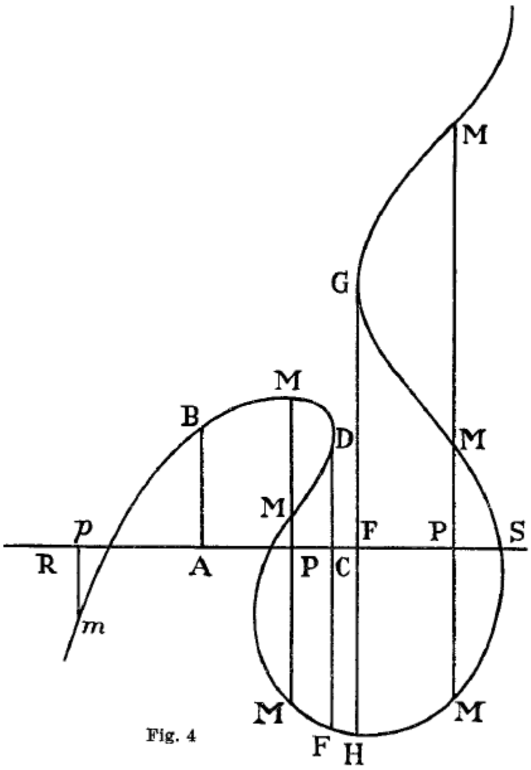


Fig. 4

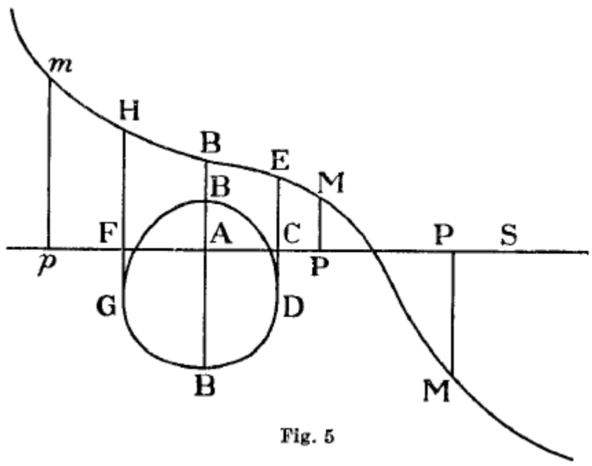


Fig. 5

4.2 Mathematischer Gehalt

Um die Mitte des 18. Jahrhunderts – also in der Entstehungszeit der *Introductio* – beschäftigten sich die Mathematiker aus dem Zeitalter der Aufklärung hauptsächlich mit folgenden beiden Aspekten der Achsengeometrie bzw. der Koordinatenmethode:

1.) Ort der Handlung ist der zwei- oder dreidimensionale euklidische Raum.
2.) Koordinaten sind kartesisch, in besonderen Fällen auch schiefwinkelig – affin oder ausnahmsweise ebene oder räumliche Polarkoordinaten.[99]

In leicht abgewandelter Form werden diese Themen auch, wie wir im Folgenden sehen werden, im ersten Kapitel des zweiten Bandes thematisiert. Euler geht hier auf den zweidimensionalen euklidischen Raum und auf kartesische Koordinaten ein, wobei jedoch in seiner *Introductio* diese Bezeichnung noch nicht zu finden ist.

Im <u>ersten Paragraphen</u> des ersten Kapitels stellt Euler eine Beziehung zwischen der Geometrie und der Analysis her, wodurch er die beiden Bände seiner *Introductio* miteinander verbindet und die Ergebnisse seines ersten Bandes ausschlaggebend für seine Abhandlungen im zweiten Band werden. Diese Verknüpfung der beiden Bücher bewirkt der Mathematiker dadurch, dass er eine veränderliche Größe mit einer Geraden RS vergleicht: der Zahlenwert einer veränderlichen Größe (Analysis) entspricht einer Teilstrecke der Geraden RS (Geometrie). Bereits jetzt führt er eine Art ‚Zahlenachse'[100] ein, indem er auf der Geraden RS einen Punkt A wählt und den Abstand des Punktes P von dem Punkt A als endlichen Wert versteht.
Nach dieser kurzen Überleitung in die analytische Geometrie führt er seine vorherigen Ideen in <u>Paragraph zwei</u> weiter aus und betont erneut, dass dem Abstand des Punktes P von einem festgelegten Punkt A ein endlicher Zahlenwert zugeordnet werden kann. Da Euler eine umfassende und vollständige Abhandlung über die Anfänge der analytischen Geometrie verfassen möchte, ist es nicht verwunderlich, dass er häufig Fallunterscheidungen durchführt, um so alle unterschiedlichen Möglichkeiten abzudecken. Beispielsweise unterscheidet er an dieser Stelle die beiden Fälle $x = 0$ und $x > 0$.

[99] Vgl. Scriba & Schreiber, 336f..
[100] Diesen Begriff verwenden auch Gelfand, Glagoleva & Kirillow in ihrem Werk ‚Die Koordinatenmethode' auf Seite 11.

1.) Falls $A = P$ ist, gilt: $x = 0$.

2.) Falls P von A ausgehend auf der Geraden RS nach rechts verschoben wird, wird x größer, und es gilt: $x > 0$.

Für den Fall, dass $A = P$ ist, verschwindet das Intervall AP. Falls jedoch $x > 0$ eintritt, gilt, dass je größer die Strecke AP wird, desto größer wird der Zahlenwert x. Durch diese Unterscheidung wird deutlich, dass der Basler sich in diesem Paragraphen mit positiven Zahlenwerten begnügt. Dies ist vermutlich darauf zurückzuführen, dass die Länge einer Strecke in der Geometrie üblicherweise mit positiven Messwerten bezeichnet wird. Um im Folgenden eine einheitliche Bezeichnung für die Intervalle AP festzulegen, definiert Euler sie als sogenannte ‚Abszissen'.[101] Auf diese Art und Weise veranschaulicht der Mathematiker $\mathbb{R}_0^+$ geometrisch, indem er entsprechenden Punkten einer Gerade umkehrbar eindeutig positive reelle Zahlen zuordnet. Er legt die Koordinaten auf einer Geraden RS fest und versteht die einem Punkt der Geraden entsprechende Zahl als dessen Koordinate, betrachtet demzufolge also ein eindimensionales Koordinatensystem – ohne diese Bezeichnungen in diesem Paragraphen zu verwenden.

Aus der Erkenntnis, dass die Gerade auf beiden Seiten ins Unendliche verläuft und demzufolge auf beiden Seiten von A alle Werte von x abgeschnitten werden können, folgert Euler in Paragraph drei, dass sowohl positive als auch negative Zahlenwerte graphisch dargestellt werden können. Er modifiziert seine Überlegungen in Paragraph zwei also dahingehend, dass er auch den Fall $x < 0$ in seine Überlegungen einbezieht, und beweist auf diese Weise erneut, dass er ein möglichst umfassendes Werk zu verfassen gewillt ist. Somit ergänzt er die beiden möglichen Fälle aus Paragraph zwei um einen weiteren, sodass er zwischen drei Möglichkeiten unterscheidet:

1.) Falls $A = P$ gelte, gilt: $x = 0$.

2.) Falls P von A ausgehend auf der Geraden RS nach rechts verschoben wird, wird x größer und es gilt: $x > 0$.

3.) Falls P von A ausgehend auf der Geraden RS nach links verschoben wird, wird x kleiner und es gilt: $x < 0$.

[101] Da diese Abszissen einen bestimmten Wert der veränderlichen Größe x darstellen, werden sie im Weiteren auch mit dem modernen Begriff ‚x-Koordinate' bezeichnet.

Willkürlich ist jedoch – von einem festgelegten Punkt A auf der Geraden ausgehend – die Wahl der Seite, die die positiven Werte von x darstellen soll; wobei die negativen Werte von x stets auf der entgegengesetzten Seite abgebildet werden. Üblicherweise wird die Abszisse mit einem positiven Vorzeichen versehen, wenn der Punkt P vom festgelegten Punkt A aus in positivem Richtungssinn, der von A aus nach rechts verläuft, erreicht werden kann, und entsprechend mit einem negativen Vorzeichen im umgekehrten Falle.
Nach diesen Vorüberlegungen widmet sich Euler in Paragraph vier der Frage, wie eine beliebige Funktion von x graphisch dargestellt werden könne. Dazu nimmt er zunächst an, dass y eine Funktion von x sei, die jedem x-Wert durch Einsetzen in die Funktionsgleichung genau einen y-Wert zuordne. Nach dieser Definition des Funktionsbegriffes wendet er sein Verständnis einer Zahlenachse aus den ersten drei Paragraphen auf eine unendliche Gerade RAS an. Dazu sollen auf dieser Geraden zunächst die Abszissen bzw. die Intervalle AP im Punkt M abgetrennt werden, die den x-Wert festlegen, und anschließend die Senkrechte zu AP mit der Länge PM errichtet werden, wobei diese Länge den y-Wert bestimmt. Zur Unterscheidung der Lage der Senkrechten bzw. der y-Werte führt Euler erneut drei verschiedene Fälle an:

1.) Falls $y = 0$ gilt, verschwindet die Senkrechte PM bzw. der y-Wert liegt auf der Geraden RS.
2.) Falls $y > 0$ gilt, liegt die Senkrechte PM oberhalb der Geraden RS.
3.) Falls $y < 0$ gilt, liegt die Senkrechte PM unterhalb der Geraden RS.

Um diese theoretischen Überlegungen zu veranschaulichen und für den Leser verständlicher zu machen, wendet er sie in Paragraph fünf auf die in Figur zwei abgebildete Funktion von x an und hält fest, für welche Intervalle die oben beschriebenen Fälle auftreten. Auch wenn Euler an dieser Stelle eine andere Reihenfolge als in Kapitel vier verwendet, soll in diesen Ausführungen die Anordnung der oben beschriebenen Fälle beibehalten werden:

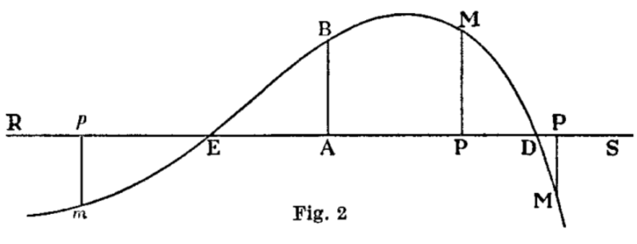


Fig. 2

1.) Falls $y = 0$ gilt, verschwindet die Senkrechte, wie beispielsweise für $x = AE$ oder $x = AD$.
2.) Falls $y > 0$ gilt, liegt die Senkrechte PM oberhalb der Geraden RS, wie für $x = AP$, das den positiven y-Wert $y = PM$ liefert.

3.) Falls $y < 0$ gilt, liegt die Senkrechte PM unterhalb der Geraden RS, wie für $x = Ap$, das den negativen y-Wert $y = pm$ liefert.

Der Vollständigkeit halber verweist Euler auch auf seinen ersten Fall aus Paragraph drei, in dem er protokolliert hat, dass unter der Bedingung $A = P$ der x-Wert verschwindet. In Figur zwei lässt sich für den Fall $x = 0$ bzw. $A = P$ der positive Wert $y = AB$ ablesen.
Im folgenden sechsten Paragraphen fasst Euler seine bisherigen Erkenntnisse zusammen und erstellt auf diese Art und Weise eine Art Konstruktionsprotokoll dafür, wie eine (einwertige) Funktion von x in die Geometrie übertragen und wie aus ihr eine gewisse Linie bzw. – unserem heutigen Verständnis nach – ein ‚Funktionsgraph' gewonnen werden kann. Zunächst wird jeder Abszisse AP ein y-Wert zugeordnet, indem zu den einzelnen Punkten P, die auf der Gerade RS liegen, die zugehörigen Senkrechten PM errichtet werden. Im Folgenden ergänzt Euler seine oben aufgeführten drei Fälle über die Lage der Senkrechten bzw. den Wert des y-Wertes um die Lage der Endpunkte M:

1.) Falls $y = 0$ gilt, verschwindet die Senkrechte, wie beispielsweise für $x = AD$ oder $x = AE$, sodass die Endpunkte D und E auf der Geraden RS liegen.
2.) Falls $y > 0$ gilt, liegt die Senkrechte PM oberhalb der Geraden RS, wie für $x = AP$, das den positiven y-Wert $y = PM$ liefert, sodass auch der Endpunkt M oberhalb der Geraden RS liegt.
3.) Falls $y < 0$ gilt, liegt die Senkrechte PM unterhalb der Geraden RS, wie für $x = Ap$, das den negativen y-Wert $y = pm$ liefert, sodass auch der Endpunkt m unterhalb der Geraden RS liegt.

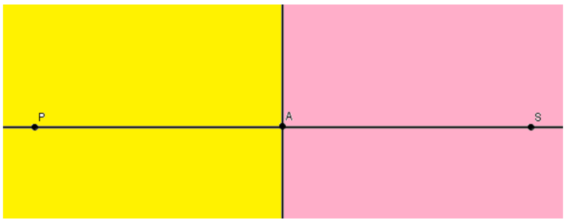
Die Endpunkte der Senkrechten zu den Abszissen werden deshalb betrachtet, weil sie eine Linie bilden – sei es eine Gerade oder eine Kurve –, die eine graphische Darstellung der Funktion von x ermöglicht. Zudem bemerkt Euler, dass die Gestalt des Graphen von der Natur der Funktion f – etwa dem Grad der Funktion und der Funktionsvorschrift f(x) – abhängt.
Im Anschluss begründet der Mathematiker im siebten Paragraphen seine These, dass alle Punkte der Kurve durch die Funktion y festgelegt und demzufolge die Kurve, die sich aus der Funktion y ergibt, eindeutig bestimmt ist. Dies begründet er damit, dass allen Punkten P auf der Geraden RS eindeutig Senkrechte PM zugeordnet werden können, deren Endpunkte M auf der Kurve liegen. Durch dieses Verfahren können zudem alle Punkte der Kurve ermittelt wer-

den, wobei die Länge der Abszissen AP die x-Koordinate und die Länge der Senkrechten PM die y-Koordinate der jeweiligen Punkte auf der Kurve angeben.
In Paragraph acht geht Euler darauf ein, dass in seinen vorliegenden Abhandlungen nur solche Kurven thematisiert werde sollen, die von Funktionen abstammen, da sie für Berechnungen geeignet sind. Auf diese Art und Weise liefert zum einen die Funktionsgleichung den zugehörigen Graphen, und zum anderen kann anhand des Graphen die zugehörige Funktionsgleichung ermittelt werden. Bei dieser Beziehung zwischen der Funktionsgleichung und ihrer graphischen Darstellung handelt es sich also um eine umkehrbar eindeutige Zuordnung, da jeder Funktionsgleichung eine bestimmte Kurve und jeder Kurve eine bestimmte Funktionsgleichung entspricht. Ausschlaggebend für diese Beziehung zwischen Analysis und Geometrie ist, dass die x-Koordinate die Intervalle AP und die y-Koordinate die wahre Länge der Senkrechten MP eindeutig festlegt.
An die Ausführung über die eindeutige Zuordnung von Funktionsgraph und Funktionsgleichung schließt Euler im nächsten neunten Paragraphen eine Unterscheidung von verschiedenen Kurventypen an: stetige, unstetige und gemischte Kurven. Dabei definiert er eine Kurve genau dann als stetig, wenn sie durch eine einzige Funktionsgleichung in ihrem ganzen Verlauf festgelegt wird. Im Gegensatz dazu versteht er unter einer unstetigen, irregulären oder gemischten Kurve eine Kurve, die verschiedene Funktionen von x ausgedrückt, sodass sie sich aus mehreren verschiedenen stetigen Kurven – wie z. B. BM, MD, DM etc. – zusammensetzt.
Im zehnten Paragraph knüpft Euler an die vorherigen Ausführungen an und stellt fest, dass in der Geometrie hauptsächlich die Kurven untersucht werden, die man durch eine einzige Regel mechanisch erzeugen kann. Da diese Eigenschaft impliziert, dass diese Kurven durch eine einzige Funktionsgleichung bestimmt werden, handelt es sich bei den in der Geometrie thematisierten Graphen um stetige Kurven.
Um alle bisherigen Ergebnisse festzuhalten und einheitliche Bezeichnungen einzuführen, definiert der Basler im elften Paragraphen verschiedene Bestandteile des Koordinatensystems:

1.) Die Gerade RS, von der die die x-Werte abgeschnitten werden, wird Achse oder Direktrix genannt und entspricht somit dem modernen Begriff der ‚x-Achse‘.
2.) Der Punkt A, der als Anfangspunkt für die Abszissen dient, wird als Ursprung der Abszissen bezeichnet. Es handelt sich dabei also um den ‚Nullpunkt‘ bzw. den ‚Koordinatenursprung‘.

3.) Die Teile der Achse AP, die die endlichen Werte von x wiedergeben, werden Abszissen genannt und stimmen mit der modernen Bezeichnung ‚x-Koordinaten' überein.
4.) Die Senkrechten PM, deren Anfangspunkt P auf der Achse und deren Endpunkt M auf der Kurve liegen, bezeichnet man als Applikaten, wofür heute die Bezeichnungen ‚Ordinate' oder ‚y-Koordinate' gebräuchlicher sind.

Zudem unterscheidet Euler zwischen den normalen bzw. orthogonalen Applikaten, die senkrecht auf den zugehörigen Abszissen stehen, und den schiefen Applikaten, welche einen von 90 Grad verschiedenen Winkel mit den Abszissen bilden. Falls nicht anders angegeben, soll in Eulers weiteren Abhandlungen stets von orthogonalen Applikaten ausgegangen werden.
Nach der Einführung von diesen für die Beschreibung des Koordinatensystems notwendigen Bezeichnungen beschäftigt sich Euler im zwölften Paragraphen mit dem Aufbau des Koordinatensystems. Folgende Skizzen sollen dabei zum leichteren Verständnis von Eulers Ausführungen beitragen:



Skizze 1

Skizze 2

Nachdem Euler darauf eingegangen ist, dass mithilfe jedes x-Wertes der zugehörige y-Wert bestimmt werden kann, folgert der Mathematiker aus dieser Überlegung, dass die Gestalt einer stetigen Kurve von der Gestalt der Funktion y abhänge. Zudem unterteilt er die Koordinatenebene in verschiedene Bereiche (siehe Skizzen), die unterschiedliche Vorzeichen für die Abszisse und die Applikate implizieren. In Skizze 1 wird deutlich, dass der Teil AS (rosa) positive und der Teil AP (gelb) negative Abszissen hervorbringt. Im Gegensatz dazu unterteilt Skizze 2 die y-Werte in positive (beige) und negative (türkis) Ordinate. Durch diese Erläuterungen kann an der Lage eines Punktes sofort auf das jeweilige Vorzeichen seiner beiden Koordinaten geschlossen werden.
Die Erkenntnis aus Paragraph 8, dass zu jeder Funktionsgleichung eindeutig ein Funktionsgraph bestimmt werden kann und umgekehrt, wird nun in Paragraph 13 auf stetige Kurven übertragen. Da eine stetige Kurve durch eine einzige Funktionsgleichung festgelegt wird,

folgt daraus, dass jeder stetigen Kurve eindeutig eine Funktionsgleichung und umgekehrt auch jeder Funktionsgleichung eindeutig eine stetige Kurve zugeordnet werden kann.

In der zehnten Vorlesung des Werkes Oeuvres complètes, 1re série, tome 8 auf den Seiten 145 bis 160 kritisiert Cauchy in seiner „Abhandlung über die stetigen Funktionen" („Mémoire sur les fonctions continues") den in diesem Paragraphen thematisierten Stetigkeitsbegriff von Euler.[102] Dort versucht Cauchy den Eulerschen Stetigkeitsbegriff mit einem Gegenbeispiel zu widerlegen, indem er die Betragsfunktion auf drei verschiedene Weisen darstellt. Da zwei dieser Schreibweisen der Betragsfunktion Euler-stetig und eine nach Eulers Verständnis unstetig sind, wäre ein- und dieselbe Funktion aufgrund eines Notationswechsels gleichzeitig Euler-stetig und nicht Euler-stetig.[103] Unabhängig davon, ob Cauchys Kritik an Euler schlüssig ist, lässt dieses Beispiel den Leser Zweifel gegenüber Eulers Stetigkeitsbegriff hegen.

Um die Gestalt einer Kurve festzulegen, bedarf es – wie Euler in Paragraph 14 darlegt – einer Gleichung, die die Variabeln x und y enthält, da diese eine Beziehung zwischen den beiden Koordinaten beliebiger Punkte, die auf der Kurve liegen, herstellt. Dabei gibt x die Abszisse und y die Applikate an, die senkrecht auf den zugehörigen Abszissen steht. Aus diesem Grund werden die Abszissen und die Applikaten zusammen betrachtet auch orthogonale Koordinaten genannt. Die Gleichung, die die beiden Variabeln x und y in Beziehung zueinander setzt, kann dabei sowohl explizit als auch implizit dargestellt werden. Da Euler an dieser Stelle nicht genauer auf diese beiden verschiedenen Darstellungsformen einer Funktion eingeht[104], wird bei der Klärung dieser beiden Begriffe auf einen anderen Autor zurückgegriffen: Eine explizite Funktionsgleichung mit zwei Veränderlichen liegt vor, wenn man eine Funktion einer Veränderlichen, z.B. f(x), mit einer anderen Veränderlichen, z.B. y, gleichsetzt, sodass die Gleichung $y = f(x)$ mit x als unabhängiger und y als abhängiger Veränderlichen entsteht. Im Gegensatz dazu stellt die implizite Funktionsgleichung mit zwei Veränderlichen eine Gleichung dar, die auf der einen Seite alle Glieder mit Veränderlichen und Konstanten enthält und deren andere Seite eine Null ist, z.B. $F(x, y) = 0$.[105]

Da Euler eine Beziehung zwischen der Analysis, die im ersten Band der *Introductio* thematisiert wird, und der Geometrie, die Gegenstand des zweiten Bandes seines Lehrbuches ist, herzustellen versucht, ist es nicht verwunderlich, dass er im fünfzehnten Paragraphen die Unterscheidung zwischen algebraischen und transzendenten Kurven auf die zwischen algebraischen

[102] Vgl. Volkert, 206.
[103] Vgl. Ebd.
[104] Dies liegt daran, dass er bei dem Leser das Wissen des ersten Bandes voraussetzt, in dem er sich in Kapitel 1, Paragraph 8 ausführlich mit expliziten und impliziten Darstellungsformen von Funktionen auseinandersetzt: „*Hae commode distinguntur in explicitas et implicitas*."
[105] Vgl. Demmig, 48 und 50.

und transzendenten Funktionen zurückführt.[106] Eulers Verständnis nach sind stetige Kurven entweder transzendent oder algebraisch, wobei eine Kurve genau dann algebraisch ist, wenn ihre Applikate eine algebraische Funktion der Abszisse x ist, also wenn die Gestalt der Kurve durch eine algebraische Gleichung zwischen den Koordinaten x und y ausgedrückt werden kann. Die zugehörige Funktionsgleichung einer algebraischen oder auch geometrischen Kurve ist demnach eine Funktion, die aus Veränderlichen und Konstanten mit algebraischen Rechenarten – wie Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Potenzieren bzw. Radizieren – gebildet werden kann.[107] Im Gegensatz dazu bezeichnet man eine Kurve genau dann als transzendent, wenn y eine transzendente Funktion von x wird. Eine transzendente (= überschreitende) Funktion ist dabei eine solche, in der auch andere als algebraische Rechenarten auftreten können, wie beispielsweise die Sinusfunktion.[108]

Im sechszehnten Paragraphen klassifiziert Euler die Natur der Funktion von x dahingehend, dass er zwischen einwertigen und mehrwertigen Funktionen unterscheidet. Wie in diesem und den folgenden drei Paragraphen dargelegt, hat diese Unterscheidung der Funktionen zwischen einwertigen und mehrwertigen erhebliche Auswirkungen auf die Gestalt des Funktionsgraphen. In diesem Paragraphen thematisiert Euler jedoch zunächst einwertige Funktionen von x, worunter er die Funktionen versteht, die jedem beliebigen x-Wert genau einen y-Wert zuordnen. Dies hat zur Folge, dass die Applikate PM in einem beliebigen Punkt P auf der Achse RS die Kurve immer nur in einem einzigen Punkt M schneidet. Weil jedem Punkt P der Achse eine Applikate PM zugeordnet wird und die x-Achse ins Unendliche verläuft, verläuft auch der Graph einer einwertigen Funktion auf beiden Seiten ins Unendliche, wie Figur zwei zeigt.

Anschließend geht Euler in Paragraph siebzehn auf zweiwertige Funktionen ein, worunter er solche Funktionen versteht, die gewissen Abszissen zwei Applikaten y zuordnen. Also wird bei einer derartigen Funktionsgleichung ein Element der Definitionsmenge auf zwei Elemente der Wertemenge abgebildet, wobei diese y-Werte dabei entweder beide reell oder beide komplex sind. Diese zweiwertigen Funktionen von x sind nach Euler so beschaffen, dass sie von der Gestalt $yy = 2Py - Q$ ($\Leftrightarrow y = P \pm \sqrt{PP - Q}$) sind, wobei y eine zweiwertige Funktion von x und P und Q zwei einwertige Funktionen von x darstellen. In einer Fallunterscheidung gibt der Mathematiker nun an, unter welchen Bedingungen die Applikaten einer zweiwertigen Funktion reelle bzw. komplexe Zahlenwerte hervorbringen.

[106] Vgl. *Introductio* Band 1, Kapitel 1, Paragraph 7: „*Functiones dividuntur in algebraicas et transcendentes; illae sunt, quae componuntur per operationes algebraicas solas; hae vero, in quibus operationes transcendentes sunt*.“.
[107] Vgl. Demmig, 46.
[108] Vgl. Ebd.

1.) Für den Fall $PP > Q$ liefert die zweiwertige Funktion zwei reelle y-Werte.
2.) Da es für den Fall $PP < Q$ aufgrund der Definition der Wurzel keine reelle Lösung für y gibt, liefert die zweiwertige Funktion zwei komplexe y-Werte.
3.) Für den Fall $PP = Q$ liefert die zweiwertige Funktion nur einen y-Wert bzw. beide Applikate sind identisch.

An Figur 3 wird deutlich, wie sich diese Fälle auf die Darstellung der zu der Funktionsgleichung zugehörigen Kurve auswirken. Für den ersten Fall, der zwei reelle y-Werte hervorbringt, werden die beiden Senkrechten zu der Abszisse die Kurve in zwei Punkten schneiden, wie z.B. für den Punkt P, dessen Senkrechte die Kurve in den beiden Endpunkten M und M schneidet. Falls jedoch der zweite Fall eintritt und zwei komplexe y-Werte einem x-Wert zugeordnet werden, wird die Abszisse dort keinen Koordinaten zugeordnet, sodass die Senkrechte zu der Achse in diesen Punkten die Kurve niemals schneiden wird, wie es für den Punkt p zutrifft. Der dritte Fall, bei dem die beiden y-Werte identisch sind, beeinflusst die graphische Darstellung der Funktion von x dahingehend, dass die Kurve sich dort zurückbiegt, wie beispielsweise die Punkte C oder G darlegen. Zusammenfassend bedeutet dies also:

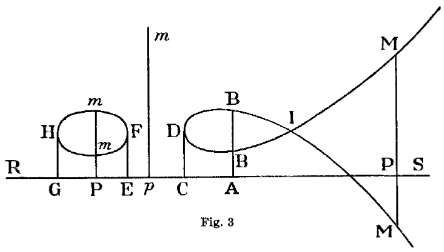


Fig. 3

1.) Für den Fall $PP > Q$ schneiden die Applikaten die Kurve in zwei Punkten.
2.) Für den Fall $PP < Q$ schneiden die Applikaten die Kurve in keinem Punkt.
3.) Für den Fall $PP = Q$ schneiden die Applikaten die Kurve in einem Punkt.

In Paragraph achtzehn führt Euler seine Überlegungen zu zweiwertigen Funktionen weiter aus und greift dabei erneut auf Figur drei zurück. Beispielhaft wendet er die drei oben beschriebenen Fälle auf den Graphen dieser Funktion an und unterscheidet dabei, ob es sich um reelle oder komplexe bzw. imaginäre Applikaten handelt. An nebenstehender Skizze kann man ablesen, für welche x-Werte die Applikaten reell (blau) oder komplex bzw. imaginär (rot) oder sowohl komplex und reell (gelb) ist. Dabei schneiden die Senkrechte zu den reellen Applikaten (blau) die Kurve in zwei Punkten, die

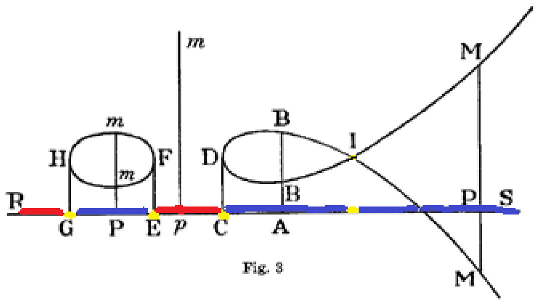


Fig. 3

komplexen Applikaten (rot) die Kurve in keinem Punkt und die sowohl komplexen als auch reellen Applikaten (gelb) die Kurve in einem Punkt. Zudem liefert Figur drei ein Beispiel dafür, dass auch eine aus zwei voneinander getrennten Teilen (MBDBM und FmHm) bestehende Kurve als eine einzige stetige Kurve angesehen gilt, weil diese in ihren einzelnen Teilen aus ein und derselben Funktionsgleichung hervorgehen.

Schließlich thematisiert Euler in seinem neunzehnten Paragraphen dreiwertige Funktionen von x, die y durch eine Gleichung $y^3 - Py^2 + Qy - R = 0$ definieren, wobei P, Q und R einwertige Funktionen von x darstellen. ‚Dreiwertig' bedeutet in diesem Zusammenhang, dass gewissen Werten von x drei y-Werte zugeordnet werden, von denen entweder alle reell oder einer reell und zwei komplex sind. Demzufolge schneiden alle Applikaten die Kurve entweder in drei Schnittpunkten oder in einem einzigen, da komplexe Applikaten – wie in den vorherigen beiden Paragraphen ausgeführt wurde – die Kurve in keinem Punkt schneiden. Jedoch besteht die Möglichkeit, dass zwei oder drei Schnittpunkte identisch sind, sodass die Applikaten die Kurve auch in zwei Schnittpunkten schneiden kann, falls zwei der drei reellen Applikaten identisch sind. Als Beispiele führt der Basler die Figuren vier und fünf an, wobei Figur vier eine Kurve beschreibt, die aus einem einzigen stetigen Teil besteht, und Figur fünf eine Kurve darstellt, die sich aus zwei Teilen zusammensetzt.

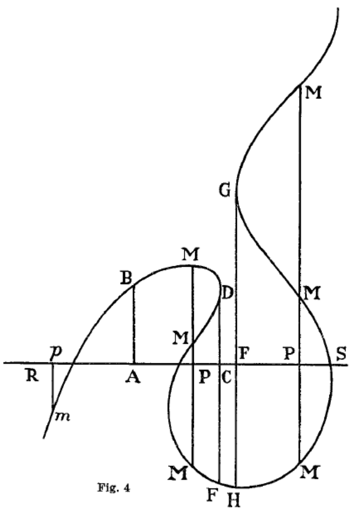


Fig. 4

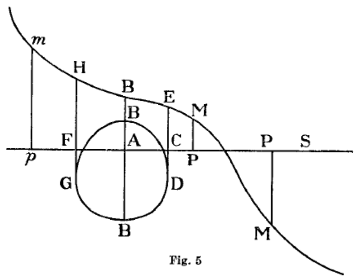


Fig. 5

Zusammenfassend lässt sich also festhalten, dass die ersten neunzehn Paragraphen des ersten Kapitels aus dem zweiten Band der *Introductio* zunächst die grundlegenden Definitionen für die geometrische Deutung der Gleichungen zweier Unbekannter liefern, wie beispielsweise die Unterscheidung zwischen einer stetigen und einer unstetigen bzw. gemischten Kurve.[109] Außerdem geht Euler darauf ein, auf welche Art und Weise Punkte in einer Art Koordinatensystem dargestellt werden können, indem man ihnen Abszissen und Applikaten zuordnet. Auch unterscheidet der Mathematiker zwischen orthogonalen und schiefen Applikaten und zwischen algebraischen und transzendenten Kurven und liefert zum Ende hin Beispiele für einwertige, zweiwertige und dreiwertige Funktionen von x.

Neben dieser kurzen inhaltlichen Zusammenfassung sei auch darauf verwiesen, dass man dem Werk seinen pädagogischen Auftrag für mathematisch interessierte Leser anmerkt. Nicht nur seine ausführlichen und detaillierten Erörterungen, sondern auch seine eingängigen Definitionen und umfassenden Fallunterscheidungen geben Auskunft darüber, wie wichtig dem Basler ein leichter Zugang zu seinen mathematischen Abhandlungen war. Als Leser erhält man zudem den Eindruck, dass das Werk in einem Zug niedergeschrieben worden ist[110], wodurch Euler die nachfolgenden Mathematikergenerationen an seiner Forschung teilhaben lässt. Dafür spricht auch, dass nicht nur die einzelnen Kapitel, sondern auch die unterschiedlichen Paragraphen aufeinander aufbauen und so den Entstehungsprozess von Eulers Ergebnissen abbilden.

[109] Vgl. Speiser, XX.
[110] Vgl. Ebd., VII.

4.3 Umsetzung in der Schule

Nach einer Übersicht über den mathematischen Gehalt der ausgewählten Paragraphen aus Eulers *Introductio* soll in diesem Kapitel eine Möglichkeit aufgezeigt werden, wie Eulers Abhandlungen auch Eingang in den Schulalltag finden können. Um die mathematischen Überlegungen des Schweizer Mathematikers für Schülerinnen und Schüler zugänglich zu machen, wurde deshalb eine Projektwoche mit sechszehn verschiedenen Stationen geplant, die sich alle auf die ersten neunzehn Paragraphen des ersten Kapitels von Eulers zweitem Band der *Introductio* stützen. Diese Projektwoche richtet sich an Jugendliche, die sich zum einen für mathematische Themen, die auch über den Schulstoff hinausgehen, interessieren und sich zum anderen für die Übersetzung von einem lateinischen Originaltext mit mathematischem Inhalt begeistern können. Da der lateinische Text zum Teil komplexe Satzkonstruktionen und den Schülerinnen und Schülern unbekannte Vokabeln enthält und auch der mathematische Gehalt dieser Paragraphen die Themen des Unterrichts übersteigt, wie am Beispiel der komplexe Zahlen deutlich wird, wurden als Zielgruppe für diese Projektwoche interessierte Jugendliche der zehnten Jahrgangsstufe bzw. der EF ausgewählt. Als Zeitpunkt für ein derartiges viertägiges Projekt erschien die letzte Woche vor den Sommerferien als geeignet, weil auf diese Weise das Unterrichtsgeschehen und eventuelle Klausurphasen nicht unterbrochen werden.

4.3.1 Ablauf der Projektwoche

Neben dieser Einschränkung der Zielgruppe und einem Vorschlag für die terminliche Eingliederung der Projektwoche in den Schulalltag soll in diesem Kapitel nun der Ablauf der Projektwoche, die sich vier Tage lang mit Eulers Abhandlungen über die graphische Darstellung einer Funktion und der Beziehungen zwischen Funktionsgraph und Funktionsgleichung beschäftigt, im Mittelpunkt stehen. Folgende Abbildung thematisiert dabei zunächst den Ablauf der ersten drei Tage der Projektwoche:

Verlaufsplan für Tag 1 bis Tag 3:

Beginn: 7:45 Uhr		
7:45 Uhr	1. Phase	SuS arbeiten selbstständig an Stationen; Lehrkraft gibt bei Fragen von Seiten der SuS Hilfestellungen
5-Minuten-Pause		
8:50 Uhr	2. Phase	SuS arbeiten selbstständig an Stationen; Lehrkraft gibt bei Fragen von Seiten der SuS Hilfestellungen
Große Pause (20 Minuten)		
10:10 Uhr	3. Phase	SuS arbeiten selbstständig an Stationen; Lehrkraft gibt bei Fragen von Seiten der SuS Hilfestellungen
5-Minuten-Pause		
11:15 Uhr	4. Phase	SuS arbeiten selbstständig an Stationen; Lehrkraft gibt bei Fragen von Seiten der SuS Hilfestellungen (45 Minuten) + Ausfüllen des Lerntagebuches von jedem einzelnen Schüler (15 Minuten)
Große Pause (20 Minuten) Lehrkraft sichtet Lerntagebücher, insbesondere Probleme der SuS bei Bearbeitung der einzelnen Stationen		
12:35 Uhr	5. Phase	Plenumsdiskussion: von den SuS notierte Probleme werden thematisiert, sofern alls SuS die jeweilige Station abgeschlossen haben
Ende: ca. 13:00 Uhr		

Eine Vorlage der individuellen Lerntagebücher, die die Schülerinnen und Schüler an den ersten drei Tagen in der fünften Phase ausfüllen sollen, ist in untenstehender Abbildung dargestellt:

Individuelles Lerntagebuch
Projektwoche ‚Eulers Introductio in analysin infinitorum – Bd. 2, Kapitel 1, § 1-19'

<u>Individuelles Lerntagebuch zum Projekt</u>
<u>‚Eulers Introductio in analysin infinitorum</u>
<u>Bd. 2, Kapitel 1, §1-19'</u>

Lerntagebuch von: ________________ (Name) am _______ (Datum)

Das habe ich heute gelernt:		*Das hab ich noch nicht so gut verstanden:*	*Daran möchte ich morgen weiterarbeiten:*	*Platz für Notizen der Lehrkraft*
Station	*Inhalt*			

1

<u>Verlaufsplan Tag 4</u>

Um den teilnehmenden Schülerinnen und Schüler eine Anerkennung für ihre Leistungen im Rahmen dieser Projektwoche auszusprechen, soll an diesem letzten Tag der Projektwoche ein kleiner Test durchgeführt werden, dessen Bestehen mit einer Urkunde für jeden einzelnen Schüler belohnt wird. Der Test zum Urkundenerwerb ist unten abgebildet:

Test zum Urkundeerwerb
Projektwoche ‚Eulers Introductio in analysin infinitorum – Bd. 2, Kapitel 1, § 1-19‘

Beantworten Sie die folgenden Fragen!

1.) Wann lebte Leonhard Euler?

____

2.) Fülle Sie folgenden Lückentext aus.

Die Gerade RS, von der die Werte von x abgeschnitten werden, wird __________ oder Direktrix genannt.
Der Punkt A, von dem die Werte für x abgetragen werden, wird der ____________ _____ ____________ genannt.
Die Teile der Achse AP, die die endlichen Werte von x wiedergeben, werden __________ genannt.
Die Senkrechten PM, die sich vom Ausgangspunkt P bis zur Kurve erstrecken, erhielten den Namen ___________.
Wenn die Applikaten mit der Achse einen rechten Winkel bilden, handelt es sich um _________ oder ___________ Applikaten.

3.) Beschreiben Sie in eigenen Worten, welches Verfahren Euler verwendet, um einen beliebigen Punkt einer Kurve bestimmen zu können.

____
____
____
____
____

4.) Erläutern Sie kurz, woran man eine einwertige Funktion von einer mehrwertigen Funktion unterscheiden kann.

____
____
____

1

Nach dieser Wissensabfrage erhalten die Schülerinnen und Schüler für den restlichen Verlauf des Tages die Möglichkeiten, sich in Gruppen erneut mit einer der sechszehn Stationen auseinanderzusetzen und zu mindestens einer der Stationen ein Plakat zu entwerfen.

4.3.2 Übersicht über die einzelnen Stationen

Um einen Überblick über die sechszehn Stationen der Projektwoche zu erhalten, die in diesem Kapitel thematisiert werden, wird zunächst folgende ‚Übersicht über alle Stationen' abgebildet:

Übersicht über alle Stationen
Projektwoche ‚Eulers Introductio in analysin infinitorum – Bd. 2, Kapitel 1, § 1-19'

Übersicht über alle Stationen zum Projekt
‚Eulers Introductio in analysin infinitorum
Bd. 2, Kapitel 1, §1-19'

Nummer	Titel
1	Das Phänomen ‚Leonhard Euler'
2	Entstehung der x-Achse
3	Vergleich x-Achse und Zahlenstrahl (§1 bis §3)
4	Graphische Darstellung einer Kurve (§4)
5	Lage der Senkrechten und der Endpunkte (§5 und §6)
6	Stetige und unstetige Kurven (§9)
7	Definitionen (§11)
8	positive und negative Abszissen und Applikaten (§12)
9	algebraische und transzendente Kurven (§15)
10	einwertig Funktionen (§16)
11	zweiwertige Funktionen (§17 und §18)
12	dreiwertige Funktionen (§19)
13	Malen nach ‚Zahlen'
14	Schach einmal anders
15	Schiffe versenken
16	Worte schreiben leicht gemacht

1

Um einer Überfüllung an den jeweiligen Stationen entgegenzuwirken, sollen die Teilnehmer schon zu Beginn folgendermaßen auf die ersten beiden Stationen verteilt werden. Die eine Hälfte der Teilnehmer soll sich zunächst mit der ersten und anschließend der Reihe nach mit den anderen Stationen beschäftigen. Die andere Hälfte der teilnehmenden Schülerinnen und Schüler erhält den Arbeitsauftrag, sich als erstes mit der zweiten Station auseinanderzusetzten, anschließend der Reihe nach bis Station zwölf einschließlich die Arbeitsblätter der jeweiligen Station zu bearbeiten und vor den letzten vier Stationen zunächst die erste Station zu absolvieren. Diese Einteilung wurde daher vorgenommen, da die letzten vier Stationen einen spielerischen Umgang mit dem Koordinatensystem enthalten – im Gegensatz zur ersten Station, die keine neuen Inhalte thematisiert.

Neben den Arbeitsblättern der einzelnen Stationen soll im Folgenden auch die Musterlösung der jeweiligen Station für die Lehrkraft beigefügt werden, um eine Transparenz der Leistungsanforderungen zu gewährleisten. Die erste dieser sechszehn Stationen beschäftigt sich mit allgemeinen Informationen über den Mathematiker, wie z.B. mit den Lebensdaten oder seinen Charaktereigenschaften. Die folgenden Stationen gehen auf ausgewählte Kapitel von Eulers erstem Kapitel des zweiten Bandes der *Introductio* ein und thematisieren nicht nur die Übersetzung ausgewählter Textstellen in ein angemessenes Deutsch, sondern auch verschiedene mathematische Überlegungen wie die Darstellung einer Funktion oder den Unterschied zwischen ein- und mehrwertigen Funktionen. Zudem lassen Eulers Überlegungen die teilnehmenden Schülerinnen und Schüler an der Entstehung des heutigen ‚Kartesischen Koordinatensystems' teilhaben. Zwar verwendete Euler in seinem Lehrwerk an keiner Stelle diese Bezeichnung, jedoch sind bei ihm zweifelsohne bereits die Anfänge eines Koordinatensystems zu finden. Die letzten vier Stationen dieser Projektwoche dienen im Gegensatz zu den anderen Aufgabenstellungen dazu, den Teilnehmern spielerisch den Umgang mit dem Koordinatensystem näherzubringen. Jedoch ist es erforderlich, dass die Schülerinnen und Schüler an diesen vier Stationen Eulers Definitionen – wie beispielsweise für den x-Wert oder den y-Wert eines Punktes - verinnerlicht haben und anwenden können.

Das Phänomen ‚Leonhard Euler‘

Leonhard Euler wurde am 15. April 1707 in Basel als Sohn des Pfarrers Paul Euler und seiner Frau Margareta Brucker geboren. Die erste Einführung in die Mathematik empfing Euler von seinem Vater selbst, anschließend lernte er bei Jakob Bernoulli (1654 bis 1705). Euler, der nicht als Wunderkind galt, jedoch für seine Hartnäckigkeit bekannt war und ein phänomenales Gedächtnis und großen Arbeitswillen hatte, wurde daraufhin von seinem Privatlehrer entdeckt und gefördert.

Im Jahre 1727 vermittelte Bernoulli ihn an die Akademie der Wissenschaften in Petersburg, wo er 1730 die Physikprofessur der Akademie und 1733 die Mathematikprofessur annahm. In Petersburg lernte er auch seine zukünftige gleichaltrige Frau kennen, die er 1733 heiratete. Sie schenkte ihm dreizehn Kinder, von denen jedoch nur fünf das Säuglingsalter überlebten. In dieser ersten Petersburger Periode ist Eulers rein wissenschaftliche Produktion gewaltig: seine Abhandlungen machen Aufsehen und bringen ihm Weltruf; sein Ruhm steigt. Bis zu seinem Weggang nach Berlin (1741) verfasste er in Petersburg allein an die hundert Arbeiten. Seine enorme wissenschaftliche Produktion ist umso erstaunlicher, als er in dieser Zeit sein rechtes Auge verliert.

1741 folgte Euler dem Ruf Friedrichs II. und zog mit seiner Familie nach Berlin, wo er an der Berliner Akademie zwanzig Jahre lang als Direktor der mathematischen Klasse lehrte; nach dem Tod des Akademiepräsidenten Maupertuis oblag ihm sogar die Leitung der ganzen Akademie. In dieser Berliner Periode verfasste Euler die ersten beiden seiner drei zusammenfassenden Lehrbücher: die Variationsrechnung sowie die berühmt gewordene, im Jahre 1748 entstandene zweibändige *Introductio in analysin infinitorum*, die „Einführung in die Analysis des Unendlichen“.

Wegen seines gestörten Verhältnisses zu Friedrich II. beschloss der Mathematiker, die Berliner Akademie zu verlassen, und wandte sich wieder Petersburg zu, wo er 1766 mit seiner Familie ankam. Während seines zweiten Aufenthalts in Petersburg wurde er von Katharina II. gefördert und unterstützt. Obwohl er an Altersstar litt, der auch nicht durch eine Operation im

Jahre 1771 geheilt werden konnte, steigerte er seine wissenschaftliche Produktion ins Unvorstellbare. Von Eulers rund 900 Abhandlungen und Büchern stammt etwa die Hälfte – darunter auch sein drittes Lehrbuch über die Integralrechnung – aus der zweiten Petersburger Zeit von 1766 bis zu seinem Tod, was für die gewaltige Gedächtniskraft des Mathematikers spricht. Neben einem erstaunlichen Gedächtnis ist das „Phänomen Euler" an zwei weitere Faktoren gebunden: zum einen an eine gewaltige Konzentrationsfähigkeit und zum anderen an stete, ruhige Arbeit. Erschüttert wurde Eulers Leben in seiner letzten Schaffensperiode jedoch durch den Tod seiner Ehefrau Katharina im Jahre 1773, mit der er rund vierzig Jahre zusammengelebt hatte. Doch fand er in der Halbschwester seiner verstorbenen Frau, Salome Abigael Gsell, eine neue Lebensgefährtin, die er 1776 heiratete und auf deren Pflege und Fürsorge der erblindete Euler angewiesen war. Am 18. September 1783 erlitt der Mathematiker mitten in der Arbeit einen Schlaganfall, dem er nach wenigen Stunden erlag, und hinterließ den nachfolgenden Generationen ein unvorstellbar wertvolles Erbe.

Trotz seines unfassbaren Talents berichten Eulers Zeitgenossen, dass der Basler sehr bescheiden und ein angenehmer Zeitgenosse gewesen sei. Er habe manchmal sogar neue Entdeckungen und Erkenntnisse verschenkt. Er gönnte jedem alles und freute sich stets auch an neuen Entdeckungen anderer. Seine Freunde rühmten ihn nicht nur für seinen Gerechtigkeitssinn, sondern auch für seinen selbstlosen Charakter; dennoch konnte er leicht aufbrausen, wobei sein Zorn ebenso schnell wieder verschwand, wie er gekommen war. Zudem war er unkompliziert, humorvoll und gesellig aber auch kritisch und draufgängerisch und bewahrte sich zeitlebens seine strenge Religiosität, die er aus seinem Elternhaus mitgebracht hatte.

<u>Fragen:</u>

1.) Wann lebte Leonhard Euler?
2.) In welchen Städten hat er sein Leben verbracht?
3.) Wann verfasste er sein Werk *Introductio in analysin infinitorum*? Was bedeutet dieser Titel übersetzt?
4.) Warum wird der Mathematiker als „Phänomen" bezeichnet?
5.) Wie beschreiben Zeitgenossen Eulers Charakter?

<u>Das Phänomen ‚Leonhard Euler'</u>

Leonhard Euler wurde am 15. April 1707 in Basel als Sohn des Pfarrers Paul Euler und seiner Frau Margareta Brucker geboren. Die erste Einführung in die Mathematik empfing Euler von seinem Vater selbst, anschließend lernte er bei Jakob Bernoulli (1654 bis 1705). Euler, der nicht als Wunderkind galt, jedoch für seine Hartnäckigkeit bekannt war und ein phänomenales Gedächtnis und großen Arbeitswillen hatte, wurde daraufhin von seinem Privatlehrer entdeckt und gefördert.
Im Jahre 1727 vermittelte Bernoulli ihn an die Akademie der Wissenschaften in Petersburg, wo er 1730 die Physikprofessur der Akademie und 1733 die Mathematikprofessur annahm. In Petersburg lernte er auch seine zukünftige gleichaltrige Frau kennen, die er 1733 heiratete. Sie schenkte ihm dreizehn Kinder, von denen jedoch nur fünf das Säuglingsalter überlebten. In dieser ersten Petersburger Periode ist Eulers rein wissenschaftliche Produktion gewaltig: seine Abhandlungen machen Aufsehen und bringen ihm Weltruf; sein Ruhm steigt. Bis zu seinem Weggang nach Berlin (1741) verfasste er in Petersburg allein an die hundert Arbeiten. Seine enorme wissenschaftliche Produktion ist umso erstaunlicher, als er in dieser Zeit sein rechtes Auge verliert.
1741 folgte Euler dem Ruf Friedrichs II. und zog mit seiner Familie nach Berlin, wo er an der Berliner Akademie zwanzig Jahre lang als Direktor der mathematischen Klasse lehrte; nach dem Tod des Akademiepräsidenten Maupertuis oblag ihm sogar die Leitung der ganzen Akademie. In dieser Berliner Periode verfasste Euler die ersten beiden seiner drei zusammenfassenden Lehrbücher: die Variationsrechnung sowie die berühmt gewordene, im Jahre 1748 entstandene zweibändige *Introductio in analysin infinitorum*, die „Einführung in die Analysis des Unendlichen".
Wegen seines gestörten Verhältnisses zu Friedrich II. beschloss der Mathematiker, die Berliner Akademie zu verlassen, und wandte sich wieder Petersburg zu, wo er 1766 mit seiner Familie ankam. Während seines zweiten Aufenthalts in Petersburg wurde er von Katharina II. gefördert und unterstützt. Obwohl er an Altersstar litt, der auch nicht durch eine Operation im Jahre 1771 geheilt werden konnte, steigerte er seine wissenschaftliche Produktion ins Unvorstellbare. Von Eulers rund 900 Abhandlungen und Büchern stammt etwa die Hälfte – darunter auch sein drittes Lehrbuch über die Integralrechnung – aus der zweiten Petersburger Zeit von 1766 bis zu seinem Tod, was für die gewaltige Gedächtniskraft des Mathematikers

spricht. Neben einem erstaunlichen Gedächtnis ist das „Phänomen Euler" an zwei weitere Faktoren gebunden: zum einen an eine gewaltige Konzentrationsfähigkeit und zum anderen an stete, ruhige Arbeit. Erschüttert wurde Eulers Leben in seiner letzten Schaffensperiode jedoch durch den Tod seiner Ehefrau Katharina im Jahre 1773, mit der er rund vierzig Jahre zusammengelebt hatte. Doch fand er in der Halbschwester seiner verstorbenen Frau, Salome Abigael Gsell, eine neue Lebensgefährtin, die er 1776 heiratete und auf deren Pflege und Fürsorge der erblindete Euler angewiesen war. Am 18. September 1783 erlitt der Mathematiker mitten in der Arbeit einen Schlaganfall, dem er nach wenigen Stunden erlag, und hinterließ den nachfolgenden Generationen ein unvorstellbar wertvolles Erbe.
Trotz seines unfassbaren Talents berichten Eulers Zeitgenossen, dass der Basler sehr bescheiden und ein angenehmer Zeitgenosse gewesen sei. Er habe manchmal sogar neue Entdeckungen und Erkenntnisse verschenkt. Er gönnte jedem alles und freute sich stets auch an neuen Entdeckungen anderer. Seine Freunde rühmten ihn nicht nur für seinen Gerechtigkeitssinn, sondern auch für seinen selbstlosen Charakter; dennoch konnte er leicht aufbrausen, wobei sein Zorn ebenso schnell wieder verschwand, wie er gekommen war. Zudem war er unkompliziert, humorvoll und gesellig aber auch kritisch und draufgängerisch und bewahrte sich zeitlebens seine strenge Religiosität, die er aus seinem Elternhaus mitgebracht hatte.

<u>Fragen mit Lösungen:</u>

1.) Wann lebte Leonhard Euler? *(15.04.1707 bis 18.09.1783)*

2.) In welchen Städten hat er sein Leben verbracht? *(Basel, Petersburg, Berlin)*

3.) Wann verfasste er sein Werk *Introductio in analysin infinitorum*? Was bedeutet dieser Titel übersetzt? *(1748: Einführung in die Analysis des Unendlichen)*

4.) Warum wird der Mathematiker als „Phänomen" bezeichnet? *(gewaltige Konzentrationsfähigkeit, stete, ruhige Arbeit, erstaunliches Gedächtnis, Arbeitswille, Hartnäckigkeit, große Produktion trotz Verlust seines Augenlichts, rund 900 Abhandlungen und Bücher)*

5.) Wie beschreiben Zeitgenossen Eulers Charakter? *(selbstlos, gerecht, leicht aufbrausend, verschenkt Entdeckungen, gönnt jedem alles, unkompliziert, humorvoll, streng religiös)*

1. Arbeitsauftrag: Übersetzen Sie die lateinischen Sätze in angemessenes Deutsch (schlagen Sie unbekannte Vokabeln im Wörterbuch nach!), und fertigen Sie mit ihrer Hilfe Skizzen zu Eulers Ausführungen an.

De lineis curvis in genere – Über Kurven im Allgemeinen (Bd. 2, Kapitel 1, §1-§3)

1. Im Allgemeinen wird eine veränderliche Größe als eine Größe betrachtet, die alle bestimmten Größen beinhaltet. *In Geometria huiusmodi quantitas variabilis*[1] *conventientissime repraesentabitur per lineam rectam indefinitam RS*. (...) *Primum igitur in linea indefinita RS punctum assumi debet A*, von wo aus die begrenzte abzuschneidende Größe ihren Anfang nehmen soll; so wird jede Strecke AP einen endlichen Wert veranschaulichen, der in der veränderlichen Größe enthalten ist.

2. Sei also x eine veränderliche Größe, die durch die unendliche Gerade RS veranschaulicht wird. Dann ist es deutlich, dass alle bestimmten Werte von x (selbst)[2], die allerdings alle reel sind, durch auf der Geraden RS abzuschneidende Teile wiedergegeben werden können. *Scilicet, si punctum P in ipso puncto A capiatur, intervallum AP evanescens exhibebit valorem* $x = 0$; *quo magis autem punctum P ab A removetur, eo maior valor determinatus ipsius*[3] *x intervallo AP repraesentabitur. Vocantur autem haec intervalla AP abscissae*[4]. So stellen die Abszissen die bestimmten Werte der Veränderlichen x dar.

3. *Quia vero recta RS indefinita utrinque ab A in infinitum excurrit, utrinque etiam omnes ipsius*[3] *x valores abscindi poterunt*. Wenn wir aber nun die positiven Werte von x durch das

[1] *quantitas variabilis* – eine veränderliche Größe.
[2] Euler verwendet in Verbindung mit x und y stets eine Form von *ipse* („selbst"; meist den Genitiv Singular *ipsius*) vermutlich um den Kasus des x oder y zu verdeutlichen. In der deutschen Übersetzung soll dieser Genitiv Singular *ipsius* jedoch nicht wiedergegeben werden.
[3] Bleibt unübersetzt (siehe Fußnote 2).
[4] *abszissa, ae* – Abszisse (Strecken der Geraden RS, die einen bestimmten Wert x darstellen).

Fortschreiten rechts von A abschneiden werden, werden die Intervalle AP, die links abgetrennt worden sind, negative Werte für x liefern. Umso weiter der Punkt P nach rechts von A wegbewegt wird, umso größer wird der Wert von x, der durch das Intervall AP angezeigt wird. Umso mehr der Punkt P nach links bewegt wird, umso kleiner wird der Wert von x und wenn P zu A gelangen sollte, möge x = 0 sein. Wohingegen die Werte von x kleiner als Null werden, das heißt negativ, wenn P weiter nach links von A wegbewegt werden sollte. Deshalb sind die Intervalle AP, die links von A abgetrennt worden sind, negative Werte von x, da ja die Intervalle AP, die rechts weggenommen worden sind, positive Werte angeben sollen. Willkürlich aber ist, welche Seite dazu ausgewählt wurde, positive Werte von x darzustellen: *semper enim opposita*[5] *valores ipsius*[3] *x negativos continebit*.

[5] Ergänze *plaga* (*plaga, ae* – Seite).

1. Arbeitsauftrag: Übersetzen Sie die lateinischen Sätze in angemessenes Deutsch (schlagen Sie unbekannte Vokabeln im Wörterbuch nach!), und fertigen Sie mit ihrer Hilfe Skizzen zu Eulers Ausführungen an.

De lineis curvis in genere – Über Kurven im Allgemeinen (Bd. 2, Kapitel 1, §1-§3)

1. Im Allgemeinen wird eine veränderliche Größe als eine Größe betrachtet, die alle bestimmten Größen beinhaltet. In der Geometrie wird eine derartige veränderliche Größe durch die gerade, unendliche Linie RS (Fig. 1) veranschaulicht. (...) Zuerst muss also auf der unendlichen Geraden RS ein Punkt A[1] gewählt werden, von wo aus die begrenzte abzuschneidende Größe ihren Anfang nehmen soll; so wird jede Strecke AP einen endlichen Wert veranschaulichen, der in der veränderlichen Größe enthalten ist.

2. Sei also x eine veränderliche Größe, die durch die unendliche Gerade RS veranschaulicht wird. Dann ist es deutlich, dass alle bestimmten Werte von x (selbst)[2], die allerdings alle reell sind, durch auf der Geraden RS abzuschneidende Teile wiedergegeben werden können. Ist der Punkt P identisch mit dem Punkt A, so wird das verschwindende Intervall den Wert $x = 0$ wiedergeben; je mehr aber der Punkt P von A wegbewegt wird, umso größer wird der bestimmte Wert von x, der durch das Intervall AP wiedergegeben werden wird.

Diese Intervalle AP aber werden Abszissen genannt.

So stellen die Abszissen die bestimmten Werte der Veränderlichen x dar.

3. Weil aber die unendliche Gerade RS auf beiden Seiten von A ins Unendliche verläuft, können auch von beiden Seiten alle Werte von x abgeschnitten werden. Wenn wir aber nun die positiven Werte von x durch das Fortschreiten rechts von A abschneiden werden, werden die Intervalle AP, die links abgetrennt worden sind, negative Werte für x liefern. Umso weiter der Punkt P nach rechts von A wegbewegt wird, umso größer wird der Wert von x, der durch das

[1] An dieser Stelle sei darauf verwiesen, dass Euler die Buchstaben keineswegs immer eindeutig verwendet, wie es z.B. bei dem Buchstaben M später der Fall sein wird.

[2] Euler verwendet in Verbindung mit x und y stets eine Form von *ipse* („selbst“; meist den Genitiv Singular *ipsius*) vermutlich um den Kasus des x oder y zu verdeutlichen. In der deutschen Übersetzung soll dieser Genitiv Singular *ipsius* jedoch nicht wiedergegeben werden.

Intervall AP angezeigt wird. Umso mehr der Punkt P nach links bewegt wird, umso kleiner wird der Wert von x und wenn P zu A gelangen sollte, möge $x = 0$ sein. Wohingegen die Werte von x kleiner als Null werden, das heißt negativ, wenn P weiter nach links von A weg-bewegt werden sollte. Deshalb sind die Intervalle AP, die links von A abgetrennt worden sind, negative Werte von x, da ja die Intervalle AP, die rechts weggenommen worden sind, positive Werte angeben sollen. Willkürlich aber ist, welche Seite dazu ausgewählt wurde, positive Werte von x darzustellen: entsprechend wird die entgegengesetzte Seite immer die negativen Werte von x darstellen.

<u>Skizzen:</u>

a) Eulers Skizze

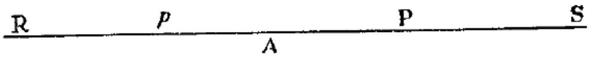


Fig. 1

b) Konstruktionsschritte

Sei RS eine unendliche Gerade / gerade Linie.

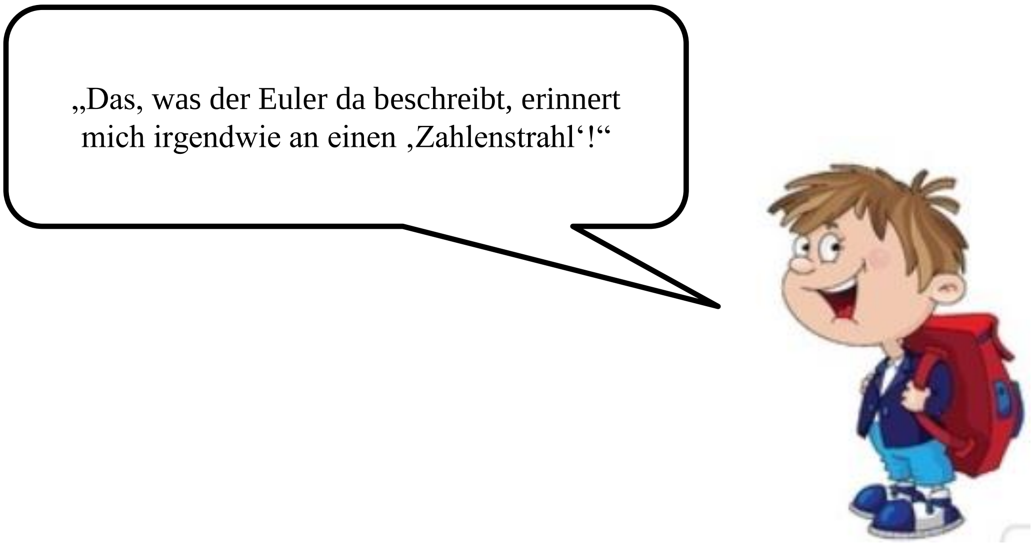
Punkt A wird auf RS gewählt.

Ein weiterer Punkt P wird auf RS gewählt.

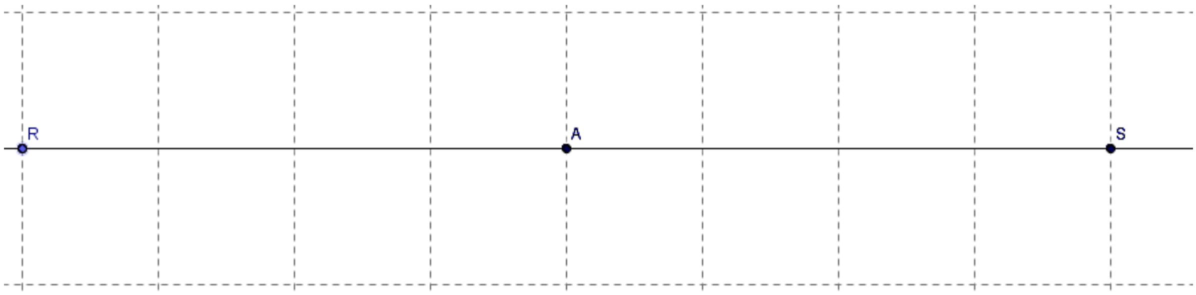
Je weiter P von A entfernt ist, desto größer wird x. Falls $A = P$ wird dem Intervall AP der Wert $x = 0$ zugeordnet.

Neben positiven Werten für x (z.B. Intervall AP_1 oder AP_2) existieren auch negative Werte für x (z.B. AP_3 oder AP_4).

<u>1. Arbeitsauftrag:</u> Fritzchen Schlaukopf hat eine Idee! Können Sie sich erklären, wie er auf die Idee kommt, Eulers Ausführungen mit einem ‚Zahlenstrahl‘ zu vergleichen?



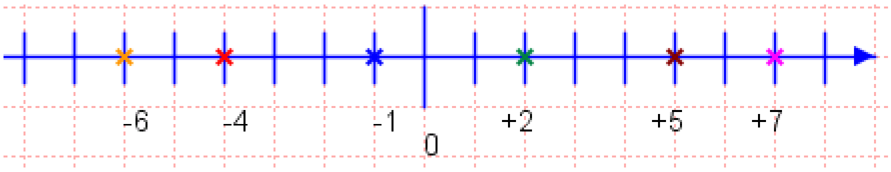
<u>2. Arbeitsauftrag:</u> Konstruieren Sie nun die Abszissen für die Werte $x = 0$, $x = 2$ und $x = -3$ auf folgender „Zahlenachse“, wobei ein Kästchen eine Längeneinheit darstellt.



<u>3. Arbeitsauftrag:</u> Hein Blöd ist sich unsicher: „Ist jetzt -3 oder -2 größer? Die Abszisse $x = -3$ ist doch länger als die Abszisse $x = -2$!“ Können Sie ihm weiterhelfen? Berücksichtigen Sie bei Ihren Überlegungen auch Eulers dritten Paragraphen (AB2)!

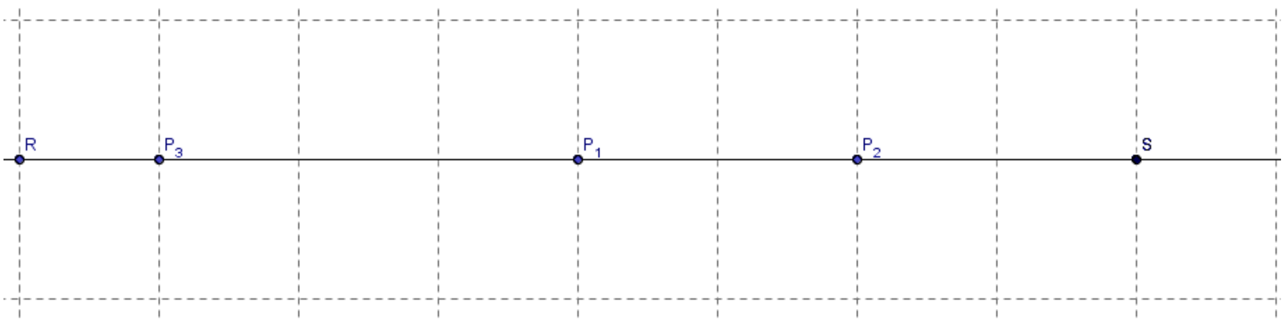
<u>1. Arbeitsauftrag:</u> Fritzchen Schlaukopf hat eine Idee! Können Sie sich erklären, wie er auf die Idee kommt, Eulers Ausführungen mit einem ‚Zahlenstrahl' zu vergleichen?

<u>Beispiel für einen Zahlenstrahl:</u>



Eine Gerade, auf der ein Ursprung, eine Einheitsstrecke und ein positiver Richtungssinn angegeben sind, nennt man ‚Zahlengerade' oder ‚Zahlenachse'. Die Zahl, die die Lage des Punktes auf der Zahlenachse charakterisiert, ist gleich dem in der gewählten Maßeinheit ausgedrückten Abstand des Punktes vom Ursprung. Dieser wird mit dem Zeichen plus versehen, falls der Punkt vom Ursprung aus im positiven Richtungssinn erreicht werden kann, und mit dem Zeichen minus im umgekehrten Falle. Sowohl die von Euler konstruierte x-Achse als auch ein Zahlenstrahl sind also gewissermaßen ‚Zahlengeraden' bzw. ‚Zahlenachsen', wobei die Zahl Null auf dem Zahlenstrahl dem Punkt A aus Eulers Abhandlungen entspricht.

<u>2. Arbeitsauftrag:</u> Konstruieren Sie nun die Abszissen für die Werte $x = 0$, $x = 2$ und $x = -3$ auf folgender „Zahlenachse", wobei ein Kästchen eine Längeneinheit darstellt.



<u>3. Arbeitsauftrag:</u> Hein Blöd ist sich unsicher: „Ist jetzt -3 oder -2 größer? Die Abszisse $x = -3$ ist doch länger als die Abszisse $x = -2$!“ Können Sie ihm weiterhelfen? Berücksichtigen Sie bei Ihren Überlegungen auch Eulers dritten Paragraphen (AB2)!

Die Abszisse $x = AP_1 = -3$ umfasst drei und die Abszisse $x = AP_2 = -2$ lediglich 2 Längeneinheiten. Da $3 > 2$ gilt, müsste demnach -3 größer als -2 sein. Jedoch wird bei dieser Überlegung das Vorzeichen der Abszisse nicht berücksichtigt.

Deshalb formuliert Euler im dritten Paragraphen zu Recht: Umso mehr der Punkt P nach links bewegt wird, umso kleiner wird der Wert von x. Da P_1 also weiter von A (dem Koordinatenursprung) entfernt ist als P_2, ist die Zahl -3 kleiner die Zahl -2 (obwohl der Betrag von -3 größer als der von -2 ist).

Nachdem Euler in seinen bisherigen Paragraphen eine Zahlengerade beschrieben hat, beschäftigt er sich nun damit, wie man eine Kurve graphisch darstellen kann.

<u>1. Arbeitsauftrag:</u> Übersetzen Sie die lateinischen Sätze in angemessenes Deutsch, und ziehen Sie dabei unter Umständen ein Wörterbuch zu Rate.

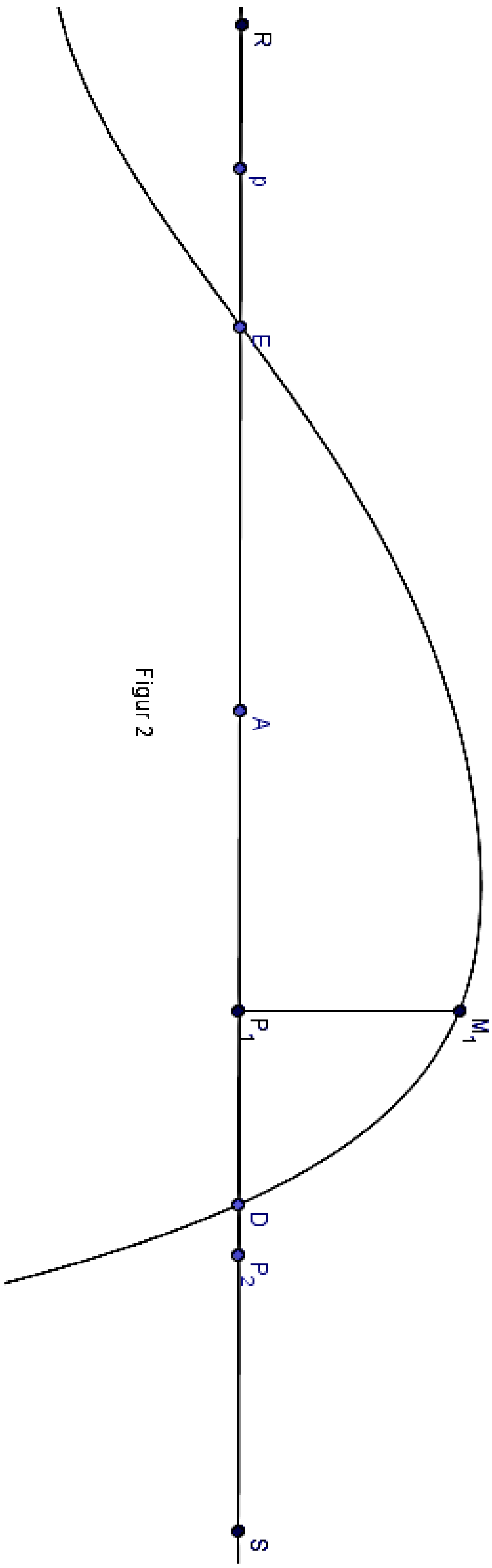
<u>De lineis curvis in genere – Über Kurven im Allgemeinen (Bd. 2, Kapitel 1, §4)</u>

4. Wenn also die unendliche Gerade die Variable x wiedergibt, möchten wir sehen, wie eine beliebige Funktion von x möglichst passend geometrisch dargestellt werden kann. Sei y eine beliebige Funktion von x, sodass y also einen bestimmten Wert annimmt, wenn für x ein begrenzter Wert eingesetzt wird. Nachdem die unendliche Gerade RAS ausgewählt worden ist, um die Werte von x anzuzeigen, wird für jeden beliebigen Wert von x das entsprechende Intervall AP festgelegt und (dann) die Senkrechte zu AP der Länge PM errichtet, was dem Wert von y entspricht. *Scilicet, si valor ipsius*[1] *y prodeat affirmativus*[2]*, is supra rectam RS constituatur, sin autem valor ipsius*[1] *y negativus oriatur, is infra rectam RS normaliter applicetur. Sumptis enim valoribus ipsius*[1] *y affirmativis*[3] *supra rectam RS, evanescentes in ipsam RS et negativi infra eam cadent.*

<u>2. Arbeitsauftrag:</u> An welche Definition erinnert Sie Eulers Aussage „Sei y eine beliebige Funktion von x, sodass y also einen bestimmten Wert annimmt, wenn für x ein begrenzter Wert eingesetzt wird."?

<u>3. Arbeitsauftrag:</u> Beschreiben Sie kurz in eigenen Worten, wie nach Eulers Auffassung jeder beliebige Punkt einer Kurve konstruiert werden kann, und beziehen Sie sich ggf. auf Figur 2. Wenden Sie ebendieses Verfahren auf die Punkte p und P_2 in Figur 2 an. Dabei soll der Punkt A der festgesetzte Punkt auf der Achse sein, der den Anfangspunkt der Abszissen darstellt.

[1] Bleibt unübersetzt.
[2] *affirmativus, a, um* – Gegenteil von *negativus, a, um*.
[3] *Sumptis...rectam RS* – Ablativus absolutus, der mit einem temporalen Nebensatz wiedergegeben werden kann.



Zusatzaufgabe: Welche Vorzeichen haben Ihrer Meinung nach die beiden Abszissen Ap und AP_2?

Nachdem Euler in seinen bisherigen Paragraphen eine Zahlengerade beschrieben hat, beschäftigt er sich nun damit, wie man eine Kurve graphisch darstellen kann.

<u>1. Arbeitsauftrag:</u> Übersetzen Sie die lateinischen Sätze in angemessenes Deutsch, und ziehen Sie dabei unter Umständen ein Wörterbuch zu Rate.

<u>De lineis curvis in genere – Über Kurven im Allgemeinen (Bd. 2, Kapitel 1, §4)</u>

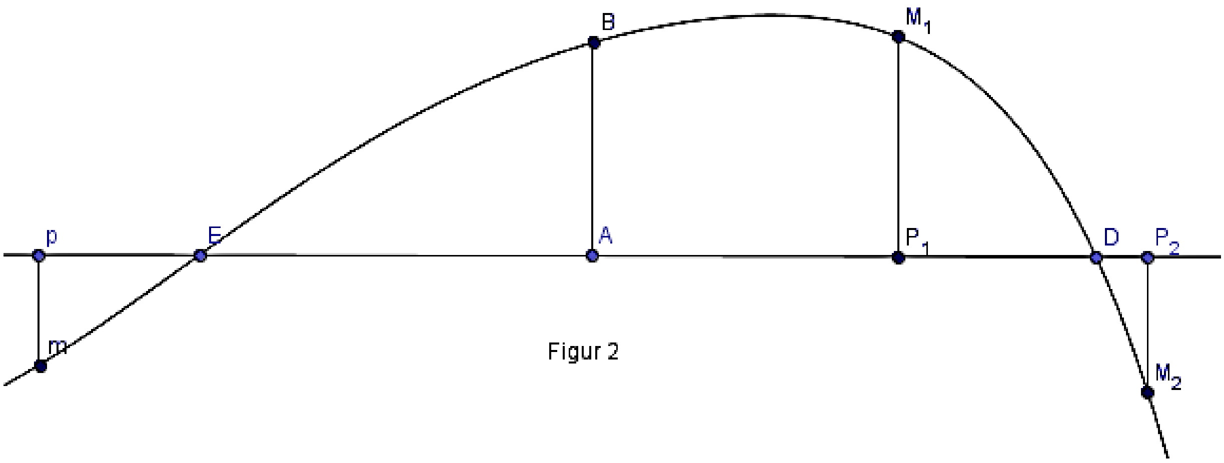
4. Wenn also die unendliche Gerade die Variable x wiedergibt, möchten wir sehen, wie eine beliebige Funktion von x möglichst passend geometrisch dargestellt werden kann. Sei y eine beliebige Funktion von x, sodass y also einen bestimmten Wert annimmt, wenn für x ein begrenzter Wert eingesetzt wird. Nachdem die unendliche Gerade RAS ausgewählt worden ist, um die Werte von x anzuzeigen, wird für jeden beliebigen Wert von x das entsprechende Intervall AP festgelegt und (dann) die Senkrechte zu AP der Länge PM errichtet, was dem Wert von y entspricht. Ist der Wert von y positiv, dann soll PM oberhalb der Geraden RS liegen, wenn aber der Wert von y negativ ist, soll die Senkrechte (bzw. PM) unterhalb der Geraden RS liegen. Nachdem die positiven Werte von y oberhalb der Geraden RS angeordnet worden sind, liegt für y = 0 der Wert von y auf der Geraden RS und für negative Werte von y unterhalb der Geraden RS.

<u>2. Arbeitsauftrag:</u> An welche Definition erinnert Sie Eulers Aussage „Sei y eine beliebige Funktion von x, sodass y also einen bestimmten Wert annimmt, wenn für x ein begrenzter Wert eingesetzt wird.“?

An die Definition einer Funktion: Jedem x-Wert wird genau ein y-Wert zugeordnet!

<u>3. Arbeitsauftrag:</u> Beschreiben Sie kurz in eigenen Worten, wie nach Eulers Auffassung jeder beliebige Punkt einer Kurve konstruiert werden kann, und beziehen Sie sich ggf. auf Figur 2. Wenden Sie ebendieses Verfahren auf die Punkte p und P_2 in Figur 2 an. Dabei soll der Punkt A der festgesetzte Punkt auf der Achse sein, der den Anfangspunkt der Abszissen darstellt.

Sei RAS eine unendliche Gerade. Um nun den Punkt einer Kurve graphisch darzustellen, müssen zunächst die Abszissen bzw. die Intervalle AP auf der Geraden RAS bestimmt werden, wobei A den Ausgangspunkt der Intervalle darstellen soll. Zu diesen Strecken wird nun die Senkrechte errichtet, wobei P einen Punkt auf der Achse und M den Endpunkt der Senkrechten auf der Kurve darstellt. Auf diese Weise kann jeder beliebige Punkt einer Kurve eindeutig bestimmt werden. Figur 2 bildete ebendieses Verfahren für die Senkrechte PM ab.

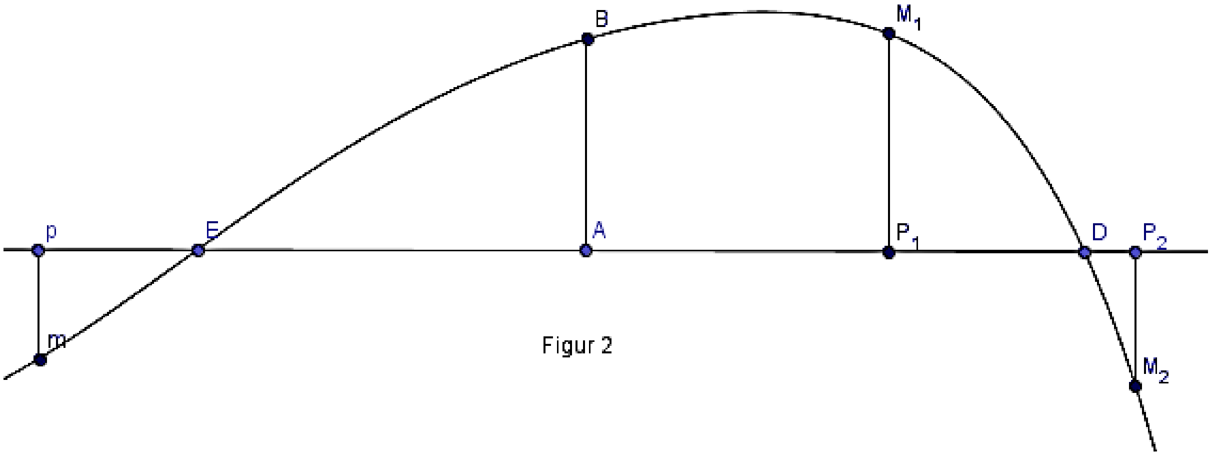


Figur 2

<u>Zusatzaufgabe:</u> Welche Vorzeichen haben Ihrer Meinung nach die beiden Abszissen Ap und AP_2?

Ap hat ein negatives Vorzeichen, da diese Abszisse auf der linken Seite von A liegt, und entsprechend hat AP_2 ein positives Vorzeichen, da diese rechts von A angeordnet ist.

Arbeitsauftrag: Ergänzen Sie folgende Aussagen über Figur 2 zu der Lage der Senkrechten und der Lage ihrer Endpunkte!



Figur 2

Lage der Senkrechten

1.) Falls $y = 0$ gilt, verschwindet die Senkrechte, wie beispielsweise für $x =$ ____ oder $x =$ ____.

2.) Falls $y > 0$ gilt, liegt die Senkrechte PM _________ der Geraden RS, wie für $x =$ ____, das den positiven y-Wert $y =$ ____ liefert.

3.) Falls $y < 0$ gilt, liegt die Senkrechte PM _________ der Geraden RS, wie für $x =$ ____ das den negativen y-Wert $y =$ ____ liefert.

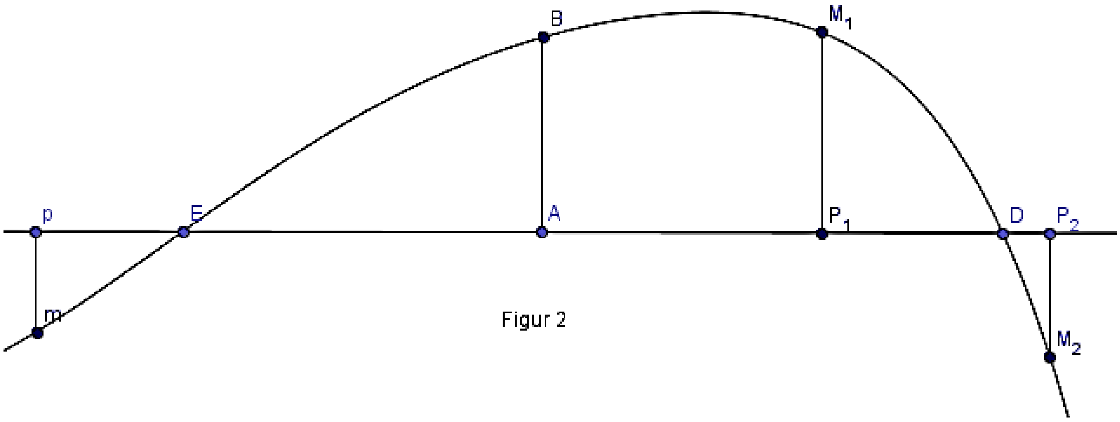
<u>Lage der Endpunkte</u>

1.) Falls $y = 0$ gilt, verschwindet die Senkrechte, wie beispielsweise für $x =$ ____ oder $x =$ ____, sodass die Endpunkte _____ und _____ auf der Geraden RS liegen

2.) Falls $y > 0$ gilt, liegt die Senkrechte PM _________ der Geraden RS, wie für $x =$ ____, das den positiven y-Wert $y =$ ____ liefert, sodass auch der Endpunkt _____ _________ der Geraden RS liegt.

3.) Falls $y < 0$ gilt, liegt die Senkrechte PM _________ der Geraden RS, wie für $x =$ ____ das den negativen y-Wert $y =$ ____ liefert, sodass auch der Endpunkt _____ _________ der Geraden RS liegt.

Arbeitsauftrag: Ergänzen Sie folgende Aussagen über Figur 2 zu der Lage der Senkrechten und der Lage ihrer Endpunkte!



Figur 2

Lage der Senkrechten

1.) Falls $y = 0$ gilt, verschwindet die Senkrechte, wie beispielsweise für $x = AE$ oder $x = AD$.

2.) Falls $y > 0$ gilt, liegt die Senkrechte PM oberhalb der Geraden RS, wie für $x = AP$, das den positiven y-Wert $y = PM$ liefert.

3.) Falls $y < 0$ gilt, liegt die Senkrechte PM unterhalb der Geraden RS, wie für $x = Ap$, das den negativen y-Wert $y = pm$ liefert.

Lage der Endpunkte

1.) Falls $y = 0$ gilt, verschwindet die Senkrechte, wie beispielsweise für $x = AD$ oder $x = AE$, sodass die Endpunkte D und E auf der Geraden RS liegen.

2.) Falls $y > 0$ gilt, liegt die Senkrechte PM oberhalb der Geraden RS, wie für $x = AP$, das den positiven y-Wert $y = PM$ liefert, sodass auch der Endpunkt M oberhalb der Geraden RS liegt.

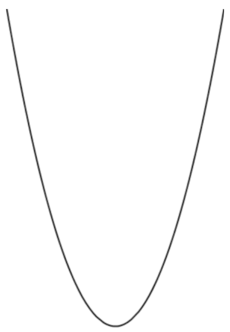
3.) Falls $y < 0$ gilt, liegt die Senkrechte PM unterhalb der Geraden RS, wie für $x = Ap$, das den negativen y-Wert $y = pm$ liefert, sodass auch der Endpunkt m unterhalb der Geraden RS liegt.

<u>1. Arbeitsauftrag:</u> Lesen Sie die deutsche Übersetzung von Eulers neuntem Paragraphen gründlich durch, und achten Sie dabei auf Eulers Definition von stetigen und unstetigen Kurven!

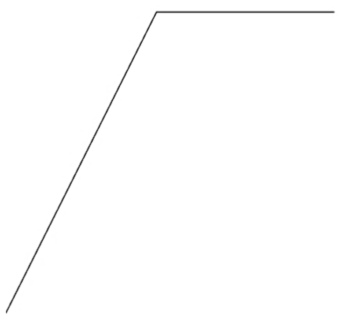
<u>De lineis curvis in genere – Über Kurven im Allgemeinen (Bd. 2, Kapitel 1, §9)</u>

9. Aus diesem Verständnis von Kurven folgt sofort die Unterscheidung von stetigen[1], unstetigen sowie gemischten Kurven. Das heißt, die Gestalt einer stetigen Kurve wird durch eine einzige Funktion von x festgelegt werden. Wenn aber eine Kurve so aufgebaut ist, dass verschiedene Teile von ihr, wie BM, MD, DM etc., durch verschiedene Funktionen von x ausgedrückt werden, sodass, nachdem gemäß einer Funktion der Teil BM bestimmt worden ist, dann gemäß einer anderen Funktion der Teil MD beschrieben wird, so nennen wir derartige Kurven unstetig oder gemischt oder irregulär. Dies liegt daran, dass sie nicht von einer einzigen konstanten Vorschrift beschrieben, sondern aus Teilen verschiedener stetiger Kurven zusammengesetzt werden.

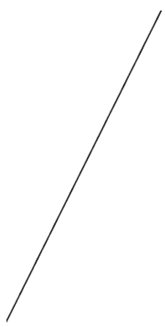
<u>2. Arbeitsauftrag:</u> Begründen Sie mithilfe von Paragraph neun, welche der Kurven nach Eulers Verständnis stetig und welche unstetig sind[2]!



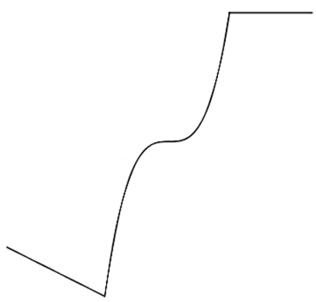
Figur 1



Figur 2



Figur 3



Figur 4

[1] Bei Euler bezieht sich ‚stetig‘ immer auf Kurven und nicht auf Funktionen.

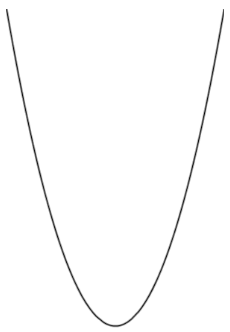
[2] Der französische Mathematiker Augustin-Louis Cauchy (1789 bis 1857) kritisierte später Eulers Stetigkeitsbegriff, indem er Eulers Theorie mit einem Gegenbeispiel zu widerlegen versuchte.

<u>1. Arbeitsauftrag:</u> Lesen Sie die deutsche Übersetzung von Eulers neuntem Paragraphen gründlich durch, und achten Sie dabei auf Eulers Definition von stetigen und unstetigen Kurven!

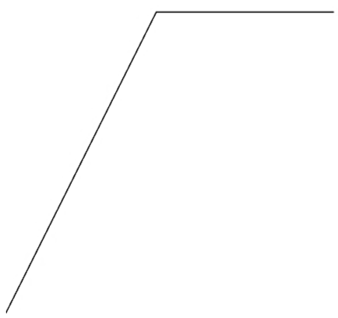
<u>De lineis curvis in genere – Über Kurven im Allgemeinen (Bd. 2, Kapitel 1, §9)</u>

9. Aus diesem Verständnis von Kurven folgt sofort die Unterscheidung von stetigen[1], unstetigen sowie gemischten Kurven. Das heißt, die **Gestalt einer stetigen Kurve** wird durch eine einzige Funktion von x festgelegt werden. Wenn aber eine Kurve so aufgebaut ist, dass verschiedene Teile von ihr, wie BM, MD, DM etc., durch verschiedene Funktionen von x ausgedrückt werden, sodass, nachdem gemäß einer Funktion der Teil BM bestimmt worden ist, dann gemäß einer anderen Funktion der Teil MD beschrieben wird, **so nennen wir derartige Kurven unstetig** oder gemischt oder irregulär. Dies liegt daran, dass sie nicht von einer einzigen konstanten Vorschrift beschrieben, sondern aus Teilen verschiedener stetiger Kurven zusammengesetzt werden.

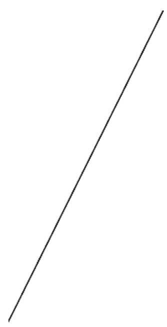
<u>2. Arbeitsauftrag:</u> Begründen Sie mithilfe von Paragraph neun, welche der Kurven nach Eulers Verständnis stetig und welche unstetig sind[2]!



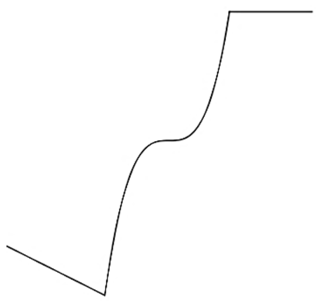
Figur 1



Figur 2



Figur 3



Figur 4

[1] Bei Euler bezieht sich ‚stetig‘ immer auf Kurven und nicht auf Funktionen.

[2] Der französische Mathematiker Augustin-Louis Cauchy (1789 bis 1857) kritisierte später Eulers Stetigkeitsbegriff, indem er Eulers Theorie mit einem Gegenbeispiel zu widerlegen versuchte.

Die Figuren 1 und 3 sind Eulers Verständnis nach stetige Kurven, da sie durch eine einzige Funktion von x festgelegt werden können, wie bspw. $f(x) = 2x$. Die Figuren 2 und 4 rechnet Euler aus dem Grunde den unstetigen Kurven zu, weil sie durch verschiedene Funktionen von x ausgedrückt werden. Dies bedeutet, dass zum Beispiel in Figur 2 die Kurve zunächst durch die Funktionsgleichung $f(x) = 2x$ definiert wird; die Kurve von einem bestimmten Punkt an jedoch eine andere Funktionsgleichung, wie z.B. $f(x) = 5$, abbildet. Auf diese Weise gibt es zwei verschiedene Funktionsgleichungen, die bestimmte Teile der Kurve aus Figur 2 beschreiben, weswegen Euler ihre Graphen als unstetige Kurven bezeichnet.

<u>1. Arbeitsauftrag:</u> Lesen Sie sich folgende Tabelle gründlich durch, und achten Sie dabei besonders auf die Definitionen, die Euler in seinem elften Paragraphen anführt!

De lineis curvis in genere – Über Kurven im Allgemeinen (Bd. 2, Kapitel 1, §11)

Originaltext (Latein)	Übersetzung (Englisch)	Übersetzung (Deutsch)
11. In hac linearum curvarum explicatione nomina quaedam sunt tenenda, quorum frequentissimus usus existit in doctrina de lineis curvis. Primum igitur recta RS, in qua valores ipsius x abscinuntur, vocatur axis seu linea recta directrix. Punctum A, a quo valores ipius x mensurantur, dicitur initium abscissarum. Portiones autem axis AP, quibus determinati ipisius x valores indicantur, vocari solent abscissae. Et perpendiculares PM ex terminis abscissarum P ad lineam curvam pertingentes nomen applicatarum obtinuerunt.	11. There is some terminology which is frequently used when discussing what is known about curves. First of all the straight line RS, from which the values of x are cut off, is called the axis or the straight line directrix. The point A, from which the values of x are measured, is called the origin of the abscissas. The parts of the axis, AP, by which the determined values of x are indicated, are called abscissas. The perpendiculars PM, reaching from the abscissa to the curve, are called ordinates.	11. Bei unseren Erklärungen zu Kurven sollten gewisse Bezeichnungen festgehalten werden, von denen in der Lehre der Kurven sehr oft Gebrauch gemacht wird. Zuerst also wird die Gerade RS, von der die Werte von x abgeschnitten werden, Achse oder Direktrix genannt.[1] Der Punkt A, von dem die Werte für x abgetragen werden, wird der Ursprung der Abszissen genannt. (Koordinatenursprung) Die Teile der Achse AP jedoch, die die endlichen Werte von x wiedergeben, werden Abszissen genannt (x-Koordinaten).

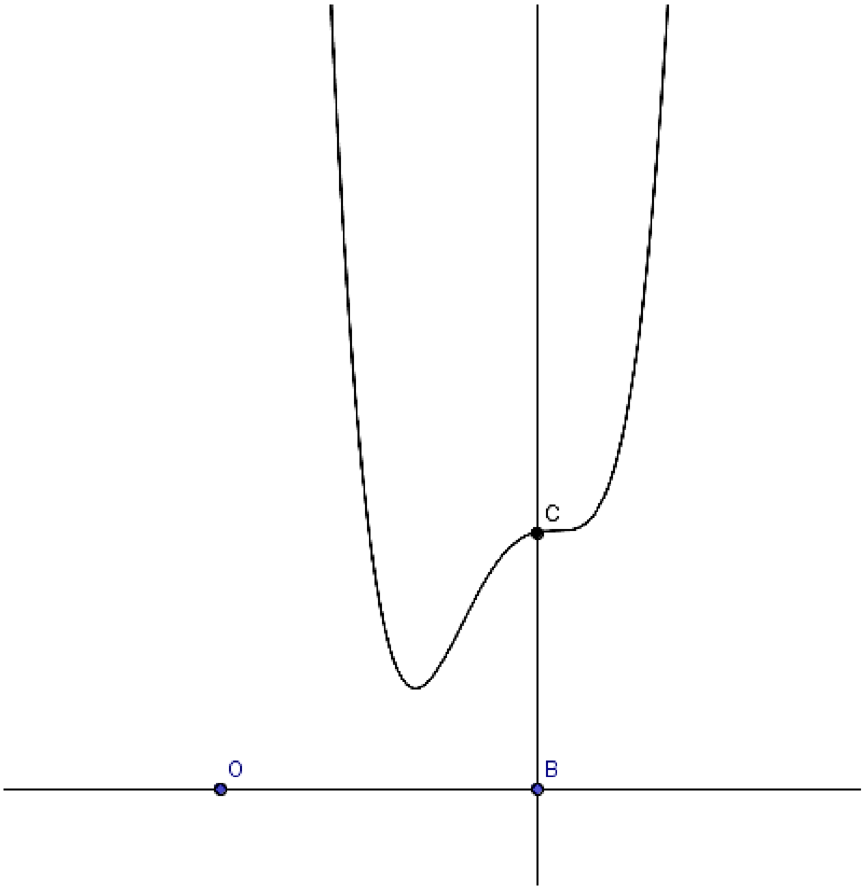
[1] Entspricht dem modernen Begriff „x-Achse“.

Vocantur autem hoc casu applicatae normales seu orthogonales, quia cum axe angulum rectum constituunt; cum enim simili modo applicatae PM ad angulum obliquum cum axe constitui possint, hoc casu applicatae obliquangulae vocantur; (....)	In this case it is called the normal or orthogonal ordinate, since it forms a right angle with the axis. When the ordinate PM forms an oblique angle with the axis, then the ordinate is called oblique. (...)	Die Senkrechten PM, die sich vom Ausgangspunkt P bis zur Kurve erstrecken, erhielten den Namen Applikaten. In diesem Fall werden sie normale oder orthogonale Applikaten genannt, weil sie ja mit der Achse einen rechten Winkel bilden; wenn aber in ähnlicher Art und Weise die Applikaten PM einen schiefen Winkel mit der Achse bilden können, werden sie schiefe Applikaten genannt. (...)

2. Arbeitsauftrag: Euler definiert in diesem Paragraphen sechs verschiedene Bestandteile unseres heutigen Kartesischen Koordinatensystems. Um welche sechs handelt es sich dabei? Tragen Sie sie in folgende Tabelle ein:

Originaltext (Latein)	**Übersetzung (Englisch)**	**Übersetzung (Deutsch)**
Beispiel: *axis seu linea recta directrix*	*axis or the straight line di-rectrix*	*Achse oder Direktrix (bzw. x-Achse)*

3. Arbeitsauftrag: Zeichnen Sie in untenstehende Graphik folgende Bestandteile eines Koordinatensystems farbig ein: *axis*, *initium abscissarum*, *abscissa* und *applicata*! Handelt es sich hier um *applicatae orthogonales* oder *applicatae obliquangulae*?



1. Arbeitsauftrag: Lesen Sie sich folgende Tabelle gründlich durch, und achten Sie dabei besonders auf die Definitionen, die Euler in seinem elften Paragraphen anführt!

De lineis curvis in genere – Über Kurven im Allgemeinen (Bd. 2, Kapitel 1, §11)

Originaltext (Latein)	Übersetzung (Englisch)	Übersetzung (Deutsch)
11. In hac linearum curvarum explicatione nomina quaedam sunt tenenda, quorum frequentissimus usus existit in doctrina de lineis curvis. Primum igitur recta RS, in qua valores ipsius x abscinuntur, vocatur axis seu linea recta directrix. Punctum A, a quo valores ipius x mensurantur, dicitur initium abscissarum. Portiones autem axis AP, quibus determinati ipisius x valores indicantur, vocari solent abscissae. Et perpendiculares PM ex terminis abscissarum P ad lineam curvam pertingentes nomen applicatarum obtinuerunt.	11. There is some terminology which is frequently used when discussing what is known about curves. First of all the straight line RS, from which the values of x are cut off, is called the axis or the straight line directrix. The point A, from which the values of x are measured, is called the origin of the abscissas. The parts of the axis, AP, by which the determined values of x are indicated, are called abscissas. The perpendiculars PM, reaching from the abscissa to the curve, are called ordinates.	11. Bei unseren Erklärungen zu Kurven sollten gewisse Bezeichnungen festgehalten werden, von denen in der Lehre der Kurven sehr oft Gebrauch gemacht wird. Zuerst also wird die Gerade RS, von der die Werte von x abgeschnitten werden, Achse oder Direktrix genannt.[1] Der Punkt A, von dem die Werte für x abgetragen werden, wird der Ursprung der Abszissen genannt. (Koordinatenursprung) Die Teile der Achse AP jedoch, die die endlichen Werte von x wiedergeben, werden Abszissen genannt (x-Koordinaten).

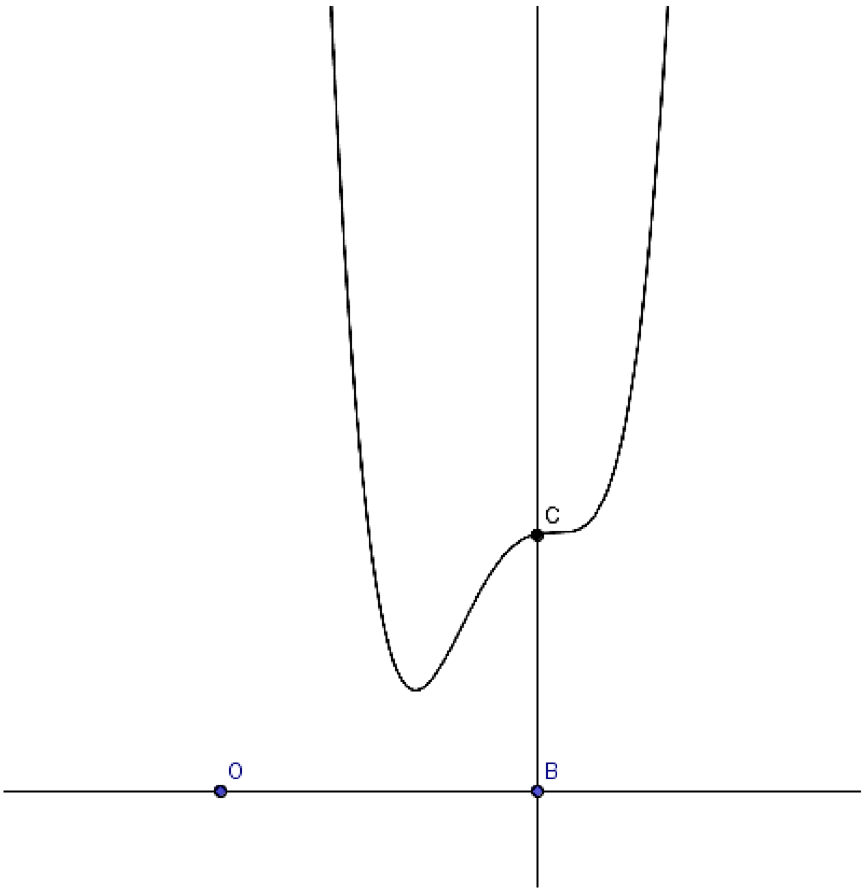
[1] Entspricht dem modernen Begriff „x-Achse“.

Vocantur autem hoc casu applicatae normales seu orthogonales, quia cum axe angulum rectum constituunt; cum enim simili modo applicatae PM ad angulum obliquum cum axe constitui possint, hoc casu applicatae obliquangulae vocantur; (....)	In this case it is called the normal or orthogonal ordinate, since it forms a right angle with the axis. When the ordinate PM forms an oblique angle with the axis, then the ordinate is called oblique. (...)	Die Senkrechten PM, die sich vom Ausgangspunkt P bis zur Kurve erstrecken, erhielten den Namen Applikaten. In diesem Fall werden sie normale oder orthogonale Applikaten genannt, weil sie ja mit der Achse einen rechten Winkel bilden; wenn aber in ähnlicher Art und Weise die Applikaten PM einen schiefen Winkel mit der Achse bilden können, werden sie schiefe Applikaten genannt. (...)

2. Arbeitsauftrag: Euler definiert in diesem Paragraphen sechs verschiedene Bestandteile unseres heutigen Kartesischen Koordinatensystems. Um welche sechs handelt es sich dabei? Tragen Sie sie in folgende Tabelle ein:

Originaltext (Latein)	**Übersetzung (Englisch)**	**Übersetzung (Deutsch)**
Beispiel: *axis seu linea recta directrix*	*axis or the straight line directrix*	*Achse oder Direktrix (bzw. x-Achse)*
initium abscissarum	origin of the abscissas	Ursprung der Abszissen (Koordinatenursprung)
abscissae	abscissas	Abszissen (x-Koordinaten)
applicatae bzw. nomen applicatarum	ordinates	Applikaten (bzw. Ordinaten)
applicatae normales seu orthogonales	normal or orthogonal ordinate	normale oder orthogonale Applikaten
applicatae obliquangulae	oblique ordinate	schiefe Applikaten

<u>3. Arbeitsauftrag:</u> Zeichnen Sie in untenstehende Graphik folgende Bestandteile eines Koordinatensystems farbig ein: *axis, initium abscissarum, abscissa* und *applicata*! Handelt es sich hier um *applicatae orthogonales* oder *applicatae obliquangulae*?



axis: Gerade durch die Punkte O und B

initium abscissarum: Punkt O

abscissa: die Strecke OB

applicata: die Strecke BC

Es handelt sich um *orthogonales applicatae*, also um orthogonale Applikate, da die Abszisse OB und die Applikate BC einen rechten Winkel bilden!

1. Arbeitsauftrag: Lesen Sie sich den zwölften Paragraphen gründlich durch, und übersetzen Sie die lateinischen Sätze in angemessenes Deutsch!

De lineis curvis in genere – Über Kurven im Allgemeinen (Bd. 2, Kapitel 1, §12)

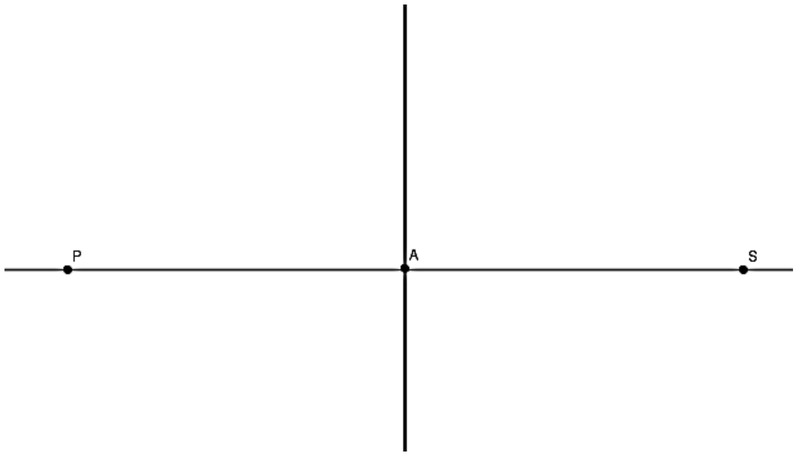
12. Wenn also irgendeine Abszisse AP durch die Variable x dargestellt wird, sodass AP = x, dann wird der Funktionswert y die Länge der Applikate PM angeben, und es wird gelten PM = y. Die Gestalt der Kurve, angenommen sie sei stetig, wird also von der Gestalt der Funktion y abhängen – das heißt von der Art und Weise, wie irgendein y aus x und aus irgendwelchen Konstanten zusammengesetzt wird. *In axe igitur RS erit portio*[1] *AS locus abscissarum affirmativarum*[2]*, portio AR locus abscissarum negativarum; tum vero supra axem RS existet regio applicatarum affirmativarum, infra autem erit regio applicatarum negativarum.*

2. Arbeitsauftrag: In welchen Bereichen des Koordinatensystems liegen also positive und negative Abszissen und Applikate? Zeichnen Sie in der ersten Skizze die Bereiche für positive und negative Abszissen und in der zweiten Skizze die für positive und negative Applikate farbig ein, und ergänzen Sie den nebenstehenden Lückentext!

[1] *portio, portionis* f – Teil.
[2] *affirmativus, a, um* – Gegenteil von *negativus, a, um.*

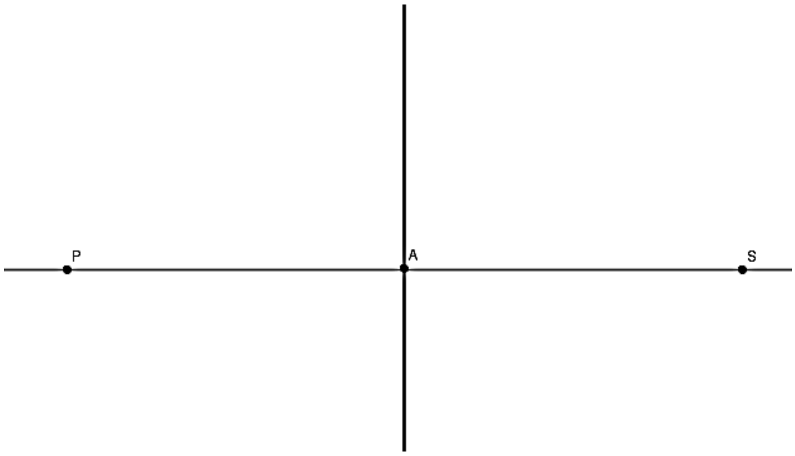
Skizze 1

Der Teil AS bringt
______________ Abszissen,
und der Teil AP
_______________Abszissen
hervor.



Skizze 2

Der Teil ____________
der Achse PS bringt
______________ Applikaten,
und der Teil ______________
der Achse PS bringt
_______________Applikaten
hervor.



1. Arbeitsauftrag: Lesen Sie sich den zwölften Paragraphen gründlich durch, und übersetzen Sie die lateinischen Sätze in angemessenes Deutsch!

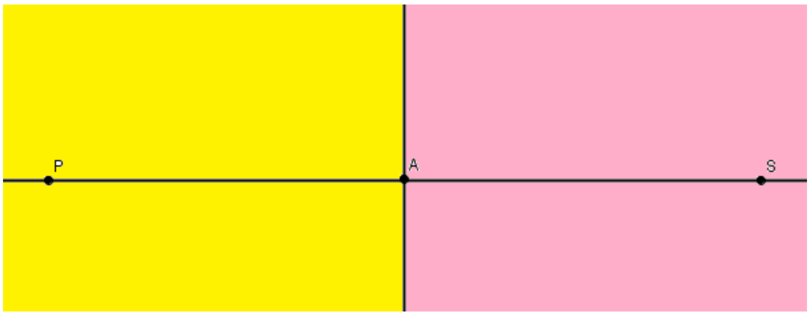
De lineis curvis in genere – Über Kurven im Allgemeinen (Bd. 2, Kapitel 1, §12)

12. Wenn also irgendeine Abszisse AP durch die Variable x dargestellt wird, sodass AP = x, dann wird der Funktionswert y die Länge der Applikate PM angeben, und es wird gelten PM = y. Die Gestalt der Kurve, angenommen sie sei stetig, wird also von der Gestalt der Funktion y abhängen – das heißt von der Art und Weise, wie irgendein y aus x und aus irgendwelchen Konstanten zusammengesetzt wird. Auf der Achse PS wird also der Teil AS der Ort für positive Abszissen, der Teil für negative Abszissen sein; dann aber wird oberhalb der Achse RS eine Gegend von positiven Applikaten, unterhalb der Achse RS aber die Gegend für negative Applikaten sein.

2. Arbeitsauftrag: In welchen Bereichen des Koordinatensystems liegen also positive und negative Abszissen und Applikate? Zeichnen Sie in der ersten Skizze die Bereiche für positive und negative Abszissen und in der zweiten Skizze die für positive und negative Applikate farbig ein, und ergänzen Sie den nebenstehenden Lückentext!

Skizze 1

Der Teil AS bringt positive Abszissen (rosa), und der Teil AP negative Abszissen (gelb) hervor.



Skizze 2

Der Teil oberhalb der Achse PS bringt positive Applikaten (beige), und der Teil unterhalb der Achse PS bringt negative Applikaten (türkis) hervor.

Durch diese Erläuterungen kann an der Lage eines Punktes sofort auf das jeweilige Vorzeichen seiner beiden Koordinaten geschlossen werden.

1. Arbeitsauftrag: Lesen Sie sich den fünfzehnten Paragraphen gründlich durch, und achten Sie dabei besonders auf Eulers Definition von algebraischen und transzendenten Kurven! Worauf führt Euler seine Erkenntnisse über Kurven zurück?

De lineis curvis in genere – Über Kurven im Allgemeinen (Bd. 2, Kapitel 1, §15)

15. Da wir die Kenntnisse über Kurven auf Wissen über Funktionen zurückgeführt haben, gibt es so viele verschiedene Arten von Kurven, wie wir oben verschiedene Arten von Funktionen gesehen haben. Aus diesem Grund erscheint es also sinnvoll, zwischen algebraischen und transzendenten Kurven zu unterscheiden. Eine Kurve sei algebraisch, wenn die Applikate y eine algebraische Funktion der Abszisse x ist; oder, wenn die Gestalt der Kurve durch eine algebraische Gleichung zwischen den Koordinaten x und y ausgedrückt wird. Diese Art von Kurven wird gewöhnlich auch geometrische genannt. Eine Kurve ist dagegen dann transzendent, wenn ihre Gestalt durch eine transzendente Gleichung zwischen x und y ausgedrückt wird, das heißt, dass y eine transzendente Funktion von x wird. Das ist die grundlegende Unterscheidung bei stetigen Kurven, wobei diese entweder algebraisch oder transzendent sind.

2. Arbeitsauftrag: Recherchieren Sie im Internet, was man unter algebraischen und transzendenten Kurven bzw. Funktionen versteht!

algebraisch: ____

transzendent: ____

1. Arbeitsauftrag: Lesen Sie sich den fünfzehnten Paragraphen gründlich durch, und achten Sie dabei besonders auf Eulers Definition von algebraischen und transzendenten Kurven! Worauf führt Euler seine Erkenntnisse über Kurven zurück?

Er führt seine Erkenntnisse über Kurven auf das Wissen über Funktionen zurück. Demzufolge werden algebraische und transzendente Kurven mithilfe von algebraischen und transzendenten Funktionen definiert.

De lineis curvis in genere – Über Kurven im Allgemeinen (Bd. 2, Kapitel 1, §15)

15. Da wir **die Kenntnisse über Kurven auf Wissen über Funktionen zurückgeführt** haben, gibt es so viele verschiedene Arten von Kurven, wie wir oben verschiedene Arten von Funktionen gesehen haben. Aus diesem Grund erscheint es also sinnvoll, zwischen algebraischen und transzendenten Kurven zu unterscheiden. Eine Kurve sei **algebraisch**, wenn die Applikate y eine algebraische Funktion der Abszisse x ist; oder, wenn die Gestalt der Kurve durch eine algebraische Gleichung zwischen den Koordinaten x und y ausgedrückt wird. Diese Art von Kurven wird gewöhnlich auch geometrische genannt. Eine Kurve ist dagegen dann **transzendent**, wenn ihre Gestalt durch eine transzendente Gleichung zwischen x und y ausgedrückt wird, das heißt, dass y eine transzendente Funktion von x wird. Das ist die grundlegende Unterscheidung bei stetigen Kurven, wobei diese entweder algebraisch oder transzendent sind.

2. Arbeitsauftrag: Recherchieren Sie im Internet, was man unter algebraischen und transzendenten Kurven bzw. Funktionen versteht!

1.) http://www.blikk.it/angebote/primarmathe/ma7930.htm (Zugriff: 27. Mai 2014)

Eine Funktion heißt algebraisch, wenn im Funktionsterm nur die Grundrechenarten und das Wurzelzeichen vorkommen (z.B. lineare oder quadratische Funktionen, Potenzfunktion). Eine mathematische Funktion heißt transzendent, wenn im Funktionsterm nicht nur die Grundrechenarten und die Wurzel vorkommen, wenn also über die vorgenannten Grundoperationen hinausgegangen wird (z. B. Exponentialfunktion).

2.) Wikipedia (Zugriff: 27. Mai 2014)

Algebraische Funktionen sind eine spezielle Klasse von Funktionen, die insbesondere in dem mathematischen Teilgebiet der Algebra untersucht wird. Sie sind die Lösung einer algebraischen Gleichung. Funktionen, die nicht algebraisch sind, werden transzendente Funktionen genannt.

Die Theorie der algebraischen Funktionen wurde in der Vergangenheit von den drei mathematischen Teilgebieten Funktionentheorie, arithmetische algebraische Geometrie und algebraische Geometrie aus entwickelt.

Beispiele

- Potenzfunktionen, also insbesondere auch quadratische und kubische Funktionen
- Polynom-Funktionen
- Rationale Funktionen beziehungsweise gebrochen-rationale Funktionen
- Wurzelfunktion

Eine Funktion wird *transzendent* genannt, falls sie nicht algebraisch ist. Hierzu zählen zum Beispiel

- die Exponentialfunktion
- die Logarithmusfunktion
- Kreis- und Hyperbelfunktionen
    - Trigonometrische Funktion
    - Hyperbelfunktion
    - Arkusfunktion
    - Areafunktion

1. Arbeitsauftrag: Lesen Sie sich den sechszehnten Paragraphen gründlich durch, und achten Sie dabei besonders auf Eulers Definition von einwertigen Funktionen! Formulieren Sie anschließend mit eigenen Worten ein Kriterium, mit dessen Hilfe man erkennen kann, ob eine Funktion einwertig (*uniformis*) ist.

De lineis curvis in genere – Über Kurven im Allgemeinen (Bd. 2, Kapitel 1, §16)

16. Um aber die Kurve zu einer gegebenen Funktion von x, durch die die Applikate y ausgedrückt wird, zu beschreiben, muss insbesondere beachtet werden, ob die Natur der Funktion entweder einwertig (*uniformis*) oder aber mehrwertig (*multiformis*) ist. Als erstes setzen wir voraus, dass y eine einwertige Funktion von x ist (...). Für jeden beliebigen Wert von x hat auch die Applikate y einen einzigen bestimmten Wert. Jeder einzelnen Abszisse wird eine einzige Applikate zugeordnet werden und deswegen wird die Kurve folgendermaßen beschaffen sein: Trägt man von einem beliebigen Punkt P auf der Achse RS die Applikate PM ab, so wird diese die Kurve immer nur in einem einzigen Punkt M schneiden. Also werden den einzelnen Punkten auf der Achse einzelne Punkte auf der Kurve zugeordnet werden; weil die Achse auf beiden Seiten ins Unendliche verläuft, wird auch die Kurve auf beiden Seiten ins Unendliche laufen. Die Kurve, die aus einer derartigen Funktion entstanden ist, wird sich in einem stetigen Verlauf auf beiden Seiten mit der Achse ins Unendliche erstrecken, wie die Figur 2 zeigt, wo die Kurve mEBMDM beiderseits ohne irgendeine Unterbrechung ins Unendliche verläuft.

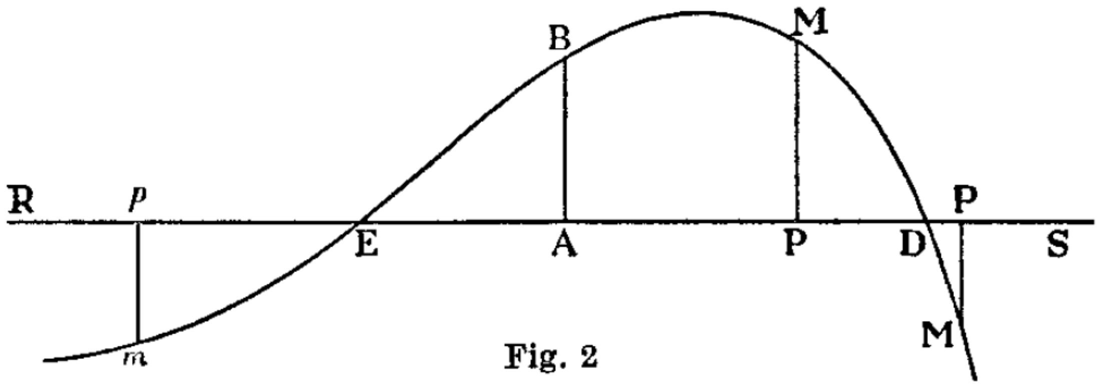
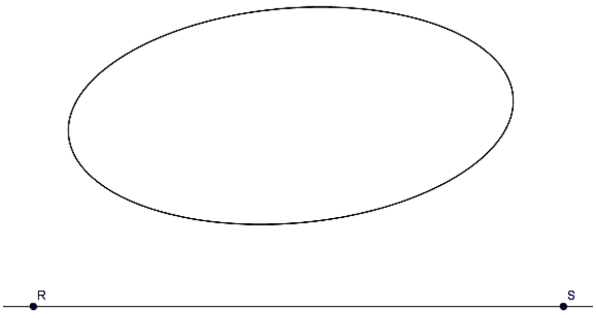
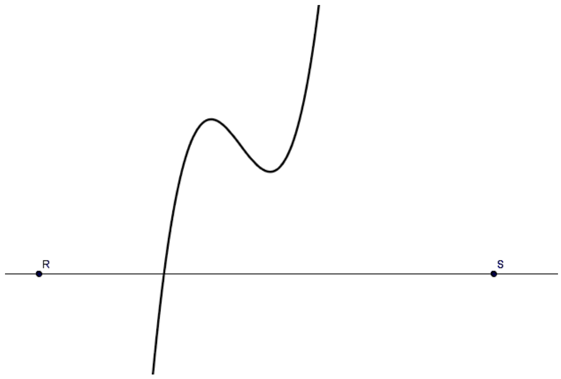


Fig. 2

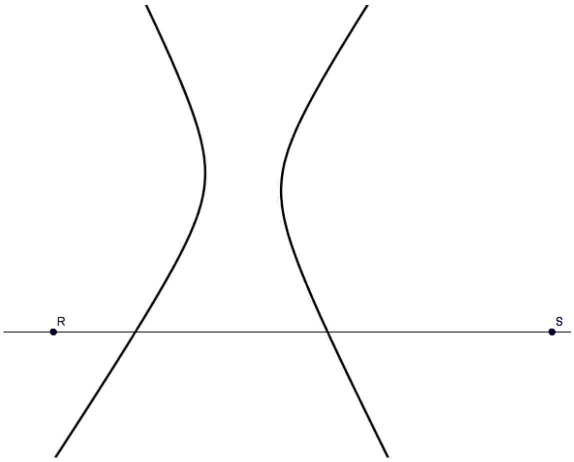
<u>2. Arbeitsauftrag:</u> Handelt es sich bei folgenden Kurven um Funktionsgraphen von einwertigen Funktionen? Begründen Sie!



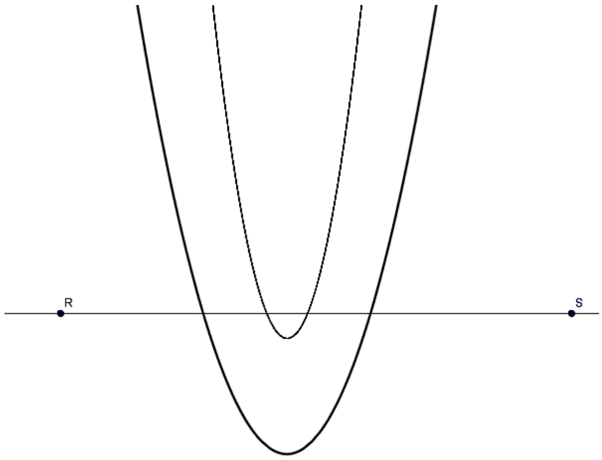
Kurve 1



Kurve 2



Kurve 3

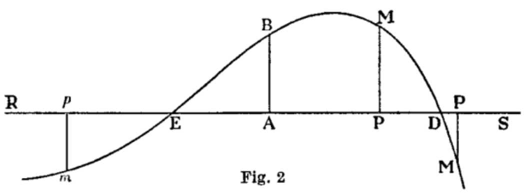


Kurve 4

1. Arbeitsauftrag: Lesen Sie sich den sechszehnten Paragraphen gründlich durch, und achten Sie dabei besonders auf Eulers Definition von einwertigen Funktionen! Formulieren Sie anschließend mit eigenen Worten ein Kriterium, mit dessen Hilfe man erkennen kann, ob eine Funktion einwertig (*uniformis*) ist.

De lineis curvis in genere – Über Kurven im Allgemeinen (Bd. 2, Kapitel 1, §16)

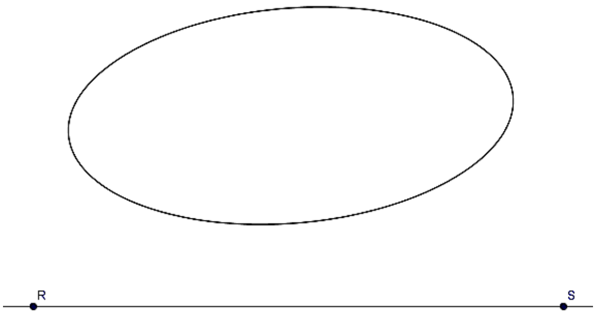
16. Um aber die Kurve zu einer gegebenen Funktion von x, durch die die Applikate y ausgedrückt wird, zu beschreiben, muss insbesondere beachtet werden, ob die Natur der Funktion entweder einwertig (*uniformis*) oder aber mehrwertig (*multiformis*) ist. Als erstes setzen wir voraus, dass y eine einwertige Funktion von x ist (...). Für jeden beliebigen Wert von x hat auch die Applikate y einen einzigen bestimmten Wert. **Jeder einzelnen Abszisse wird eine einzige Applikate zugeordnet** werden und deswegen wird die Kurve folgendermaßen beschaffen sein: **Trägt man von einem beliebigen Punkt P auf der Achse RS die Applikate PM ab, so wird diese die Kurve immer nur in einem einzigen Punkt M schneiden.** Also werden den einzelnen Punkten auf der Achse einzelne Punkte auf der Kurve zugeordnet werden; weil die Achse auf beiden Seiten ins Unendliche verläuft, wird auch die Kurve auf beiden Seiten ins Unendliche laufen. Die Kurve, die aus einer derartigen Funktion entstanden ist, wird sich in einem stetigen Verlauf auf beiden Seiten mit der Achse ins Unendliche erstrecken, wie die Figur 2 zeigt, wo die Kurve mEBMDM beiderseits ohne irgendeine Unterbrechung ins Unendliche verläuft.



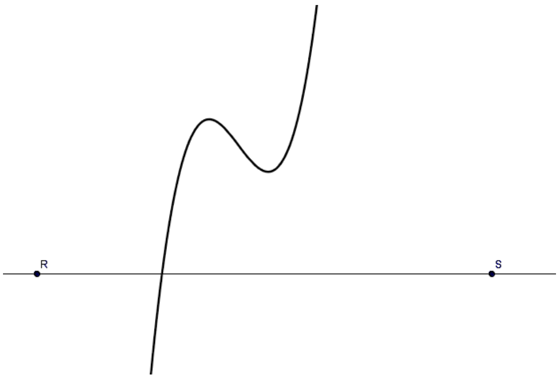
Kriterium:

Ein Funktion ist genau dann einwertig, falls jeder beliebigen Abszisse (x-Wert) genau eine Applikate (y-Wert) zugeordnet wird. Anhand des Funktionsgraphen lässt sich dies folgerdermaßen ablesen: Errichtet man zu jeder beliebigen Abzsizze auf der Achse RS die Senkrechte, so schneidet diese die Kurve in genau einem Punkt. Deshalb wird diese Funktion auch ein-Wert-ig genannt.

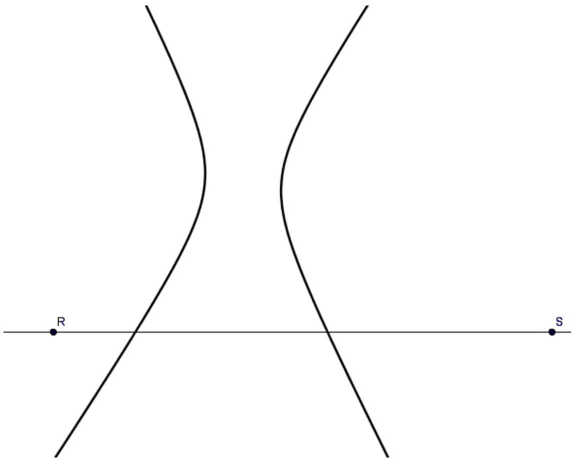
<u>2. Arbeitsauftrag:</u> Handelt es sich bei folgenden Kurven um Funktionsgraphen von einwertigen Funktionen? Begründen Sie!



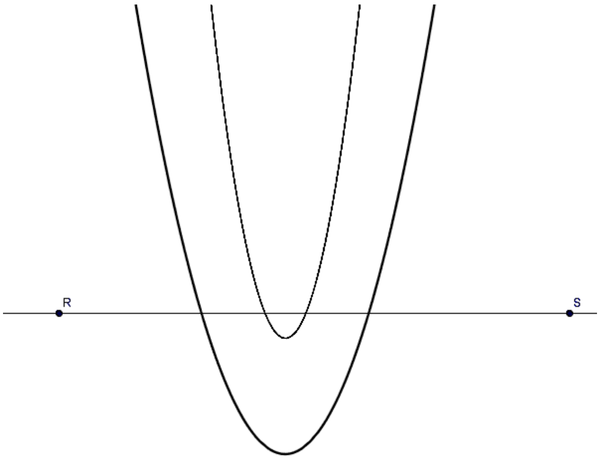
Kurve 1



Kurve 2



Kurve 3



Kurve 4

Bei Kurve 2 handelt es sich um den Funktionsgraphen einer einwertigen Funktion, da jedem beliebigen x-Wert genau ein y-Wert zugeordnet wird bzw. die Senkrechte zu einer beliebigen Abszisse den Graphen immer in einem Punkt schneidet. Die anderen drei Kurven 1, 3 und 4 stellen keine Graphen von einwertigen Funktionen dar, da die Senkrechte zu einer beliebigen Abszisse der Achse RS die Kurve (meist)[1] in zwei Punkten schneidet.

[1] Bei den Kurven 1 und 3 existieren jedoch jeweils zwei x-Werte, denen lediglich ein y-Wert zugeordnet wird.

<u>1. Arbeitsauftrag:</u> Lesen Sie sich die beiden folgenden Paragraphen gründlich durch, und achten Sie dabei besonders auf Eulers Definition von zweiwertigen Funktionen! Welche Form haben Eulers Auffassung nach zweiwertige Funktionen?

De lineis curvis in genere – Über Kurven im Allgemeinen (Bd. 2, Kapitel 1, §17 - §18)

17. Sei y eine zweiwertige Funktion von x, seien also P und Q beides einwertige Funktionen von x, und sei $yy = 2Py - Q$, sodass $y = P \pm \sqrt{PP - Q}$. Also werden jeder einzelnen Abszisse x zwei Applikate y zugeordnet, beide entweder reell oder komplex, wobei y für $PP > Q$ reell und für $PP < Q$ komplex ist. Solange also beide Werte von y reell sind, werden der Abszisse AP zwei Applikaten PM, PM zugeordnet werden (Fig. 3), sodass die Senkrechte zu der Achse im Punkt P die Kurve in zwei Punkten M und M treffen wird. Sobald aber $PP < Q$ gilt, wird die Abszisse x dort keinen Koordinaten zugeordnet werden; die Senkrechte zu der Achse wird in diesen Punkten niemals die Kurve schneiden, wie das bei Punkt p in Figur 3 der Fall ist. Aber falls vorher $PP > Q$ gegolten hätte, hätte nicht $PP < Q$ gelten können, außer für den Fall $PP = Q$, der die Grenze zwischen reellen und komplexen Applikaten darstellt. Sobald also die reellen Applikaten verschwinden, wie in C oder G, gilt dort $y = P \pm 0$, und beide Applikaten sind gleich, sodass sich dort die Kurve zurückbiegt.

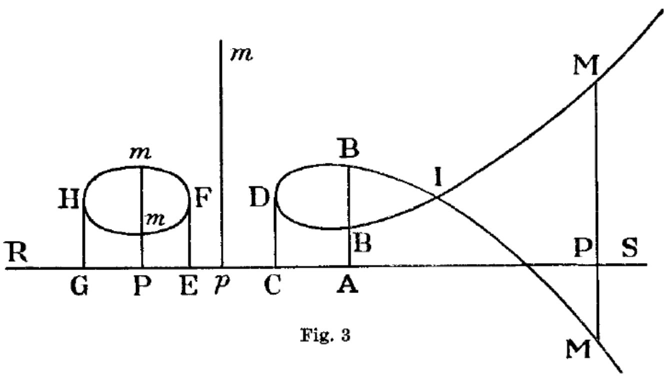


Fig. 3

18. In Figur 3 wird deutlich, dass, solange die Abszisse negativ ist und x zwischen den Grenzen AC und AE liegt, die Applikate komplex ist, und es gilt $PP < Q$; links neben E werden die Applikaten wieder reell, was nicht geschehen kann, außer in E gilt $PP = Q$, weshalb beide Applikaten gleich sind. Dann wieder werden den Abszissen AP zwei Applikaten Pm, Pm zugeordnet, solange bis wir zu G kommen, wo diese beiden Applikaten gleich werden. Links von G werden sie schließlich imaginär. Auf diese Art und Weise kann

eine Kurve aus zwei voneinander getrennten Teilen, wie MBDBM und FmHm, oder aus mehreren Teilen bestehen. Dennoch müssen diese Teile als zusammengehörig betrachtet und somit als eine einzige stetige oder reguläre Kurve angesehen werden, weil diese einzelnen Teile aus ein und derselben Funktion hervorgehen. Diese Kurven haben also die Eigenschaft, dass, wenn in einzelnen Punkten der Achse die Senkrechten MM gebildet werden, diese immer die Kurve entweder gar nicht oder in zwei Punkten schneiden; außer die zwei Punkte fallen zusammen, wie das bei den Applikaten in den Punkten D, F, H und I der Fall ist.

<u>2. Arbeitsauftrag:</u> Ergänzen Sie folgenden Lückentext, der sich damit beschäftigt, unter welchen Bedingungen die Applikate einer zweiwertigen Funktion reelle bzw. komplexe[1] Zahlenwerte hervorbringt.

1.) Für den Fall $PP > Q$ liefert die zweiwertige Funktion ______ _______ y-Werte.

2.) Da es für den Fall $PP < Q$ aufgrund der Definition der Wurzel keine reelle Lösung für y gibt, liefert die zweiwertige Funktion _____ ________ y-Werte.

3.) Für den Fall $PP = Q$ liefert die zweiwertige Funktion nur ________ y-Wert bzw. beide Applikaten sind ____________.

<u>In wie vielen Punkten schneiden die Applikaten die Kurve also für diese drei Fälle?</u>

1.) Für den Fall $PP > Q$ schneiden die Applikaten die Kurve in ______ Punkt(en).

2.) Für den Fall $PP < Q$ schneiden die Applikaten die Kurve in ______ Punkt(en).

3.) Für den Fall $PP = Q$ schneiden die Applikaten die Kurve in ______ Punkt(en).

[1] Die komplexen Zahlen erweitern den Zahlenbereich der reellen Zahlen derart, dass die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ lösbar wird.

<u>1. Arbeitsauftrag:</u> Lesen Sie sich die beiden folgenden Paragraphen gründlich durch, und achten Sie dabei besonders auf Eulers Definition von zweiwertigen Funktionen! Welche Form haben Eulers Auffassung nach zweiwertige Funktionen?

Nach Euler sind alle zweiwertigen Funktionen so beschaffen, dass sie von der Gestalt $yy = 2Py - Q \Leftrightarrow y = P \pm \sqrt{(PP - Q)}$ sind, wobei y eine zweiwertige Funktion von x und P und Q zwei einwertige Funktionen von x darstellen

<u>De lineis curvis in genere – Über Kurven im Allgemeinen (Bd. 2, Kapitel 1, §17 - §18)</u>

17. Sei y eine zweiwertige Funktion von x, seien also P und Q beides einwertige Funktionen von x, und sei $yy = 2Py - Q$, sodass $y = P \pm \sqrt{PP - Q}$. **Also werden jeder einzelnen Abszisse x zwei Applikate y zugeordnet, beide entweder reell oder komplex, wobei y für $\boldsymbol{PP > Q}$ reell und für $\boldsymbol{PP < Q}$ komplex ist.** Solange also beide Werte von y reell sind, werden der Abszisse AP zwei Applikaten PM, PM zugeordnet werden (Fig. 3), sodass die Senkrechte zu der Achse im Punkt P die Kurve in **zwei Punkten** M und M treffen wird. Sobald aber $\boldsymbol{PP < Q}$ gilt, wird die Abszisse x dort keinen Koordinaten zugeordnet werden; die Senkrechte zu der Achse wird in diesen Punkten **niemals die Kurve schneiden**, wie das bei Punkt p in Figur 3 der Fall ist. Aber falls vorher $PP > Q$ gegolten hätte, hätte nicht $PP < Q$ gelten können, außer für den Fall $\boldsymbol{PP = Q}$, der die Grenze zwischen reellen und komplexen Applikaten darstellt. Sobald also die reellen Applikaten verschwinden, wie in C oder G, gilt dort $y = P \pm 0$, und **beide Applikaten sind gleich**, sodass sich dort die Kurve zurückbiegt.

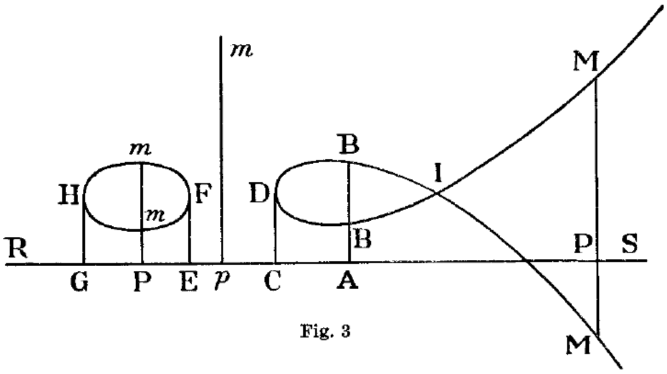


Fig. 3

18. In Figur 3 wird deutlich, dass, solange die Abszisse negativ ist und x zwischen den Grenzen AC und AE liegt, die Applikate komplex ist, und es gilt $PP < Q$; links neben E

werden die Applikaten wieder reell, was nicht geschehen kann, außer in E gilt $PP = Q$, weshalb beide Applikaten gleich sind. Dann wieder werden den Abszissen AP zwei Applikaten Pm, Pm zugeordnet, solange bis wir zu G kommen, wo diese beiden Applikaten gleich werden. Links von G werden sie schließlich imaginär. Auf diese Art und Weise kann eine Kurve aus zwei voneinander getrennten Teilen, wie MBDBM und FmHm, oder aus mehreren Teilen bestehen. Dennoch müssen diese Teile als zusammengehörig betrachtet und somit als eine einzige stetige oder reguläre Kurve angesehen werden, weil diese einzelnen Teile aus ein und derselben Funktion hervorgehen. Diese Kurven haben also die Eigenschaft, dass, wenn in einzelnen Punkten der Achse die Senkrechten MM gebildet werden, diese immer die Kurve entweder gar nicht oder in zwei Punkten schneiden; außer die zwei Punkte fallen zusammen, wie das bei den Applikaten in den Punkten D, F, H und I der Fall ist.

<u>2. Arbeitsauftrag:</u> Ergänzen Sie folgenden Lückentext, der sich damit beschäftigt, unter welchen Bedingungen die Applikate einer zweiwertigen Funktion reelle bzw. komplexe[1] Zahlenwerte hervorbringt.

1.) Für den Fall $PP > Q$ liefert die zweiwertige Funktion zwei reelle y-Werte.
2.) Da es für den Fall $PP < Q$ aufgrund der Definition der Wurzel keine reelle Lösung für y gibt, liefert die zweiwertige Funktion zwei komplexe y-Werte.
3.) Für den Fall $PP = Q$ liefert die zweiwertige Funktion nur einen y-Wert bzw. beide Applikaten sind identisch.

<u>In wie vielen Punkten schneiden die Applikaten die Kurve also für diese drei Fälle?</u>

1.) Für den Fall $PP > Q$ schneiden die Applikaten die Kurve in zwei Punkten.
2.) Für den Fall $PP < Q$ schneiden die Applikaten die Kurve in keinem Punkt.
3.) Für den Fall $PP = Q$ schneiden die Applikaten die Kurve in einem Punkt.

[1] Die komplexen Zahlen erweitern den Zahlenbereich der reellen Zahlen derart, dass die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ lösbar wird.

<u>1. Arbeitsauftrag:</u> Entscheiden Sie mithilfe Ihres bisherigen Wissens über mehrwertige Funktionen, ob es sich bei folgenden Kurven (Figur vier und Figur fünf) nach Eulers Verständnis um die Graphen von dreiwertigen Funktionen (*triformis functio*) handelt. Begründen Sie Ihre Entscheidung!

<u>De lineis curvis in genere – Über Kurven im Allgemeinen (Bd. 2, Kapitel 1, §19)</u>

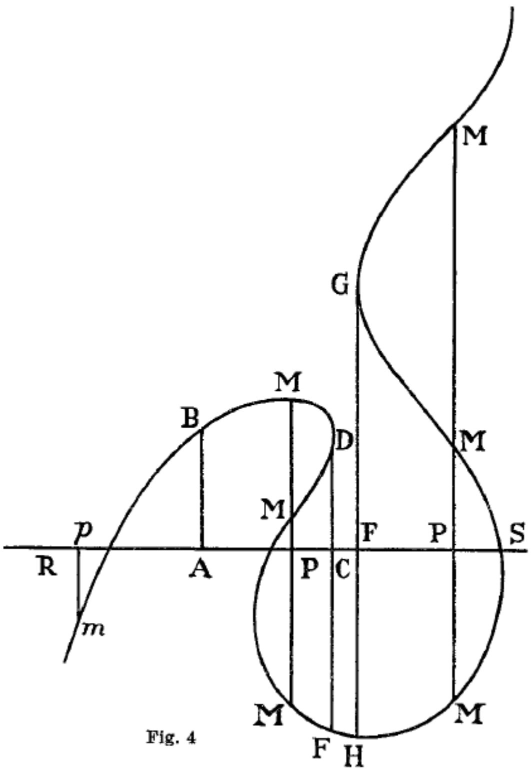


Fig. 4

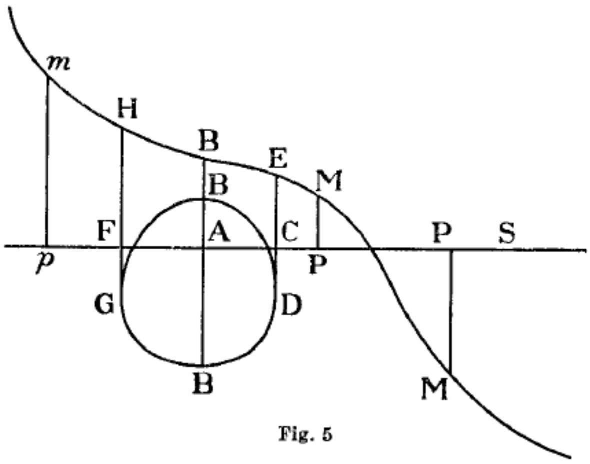


Fig. 5

<u>Zusatzaufgabe:</u> Stellen Sie eine Vermutung darüber auf, welches Kriterium eine Funktion erfüllen muss, um in Eulers Augen als eine ‚vierwertige Funktion‘ (*quadriformis functio*) zu gelten.

<u>1. Arbeitsauftrag:</u> Entscheiden Sie mithilfe Ihres bisherigen Wissens über mehrwertige Funktionen, ob es sich bei folgenden Kurven (Figur vier und Figur fünf) nach Eulers Verständnis um die Graphen von dreiwertigen Funktionen (*triformis functio*) handelt. Begründen Sie Ihre Entscheidung!

<u>De lineis curvis in genere – Über Kurven im Allgemeinen (Bd. 2, Kapitel 1, §19)</u>

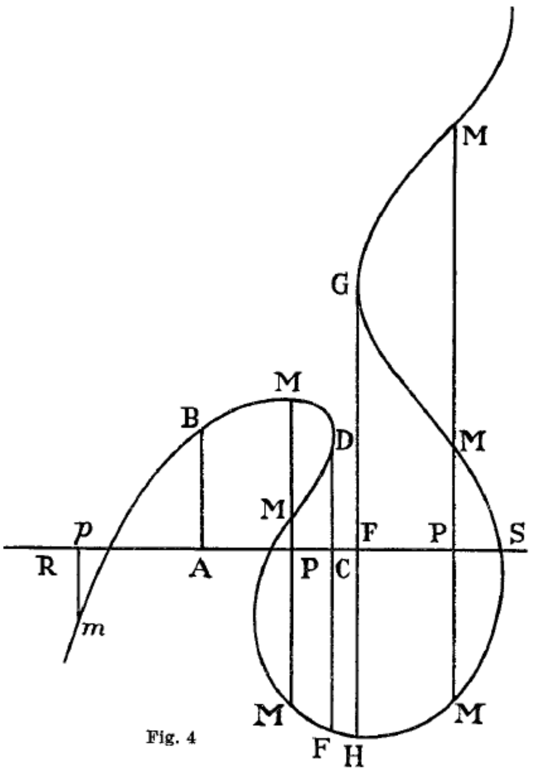


Fig. 4

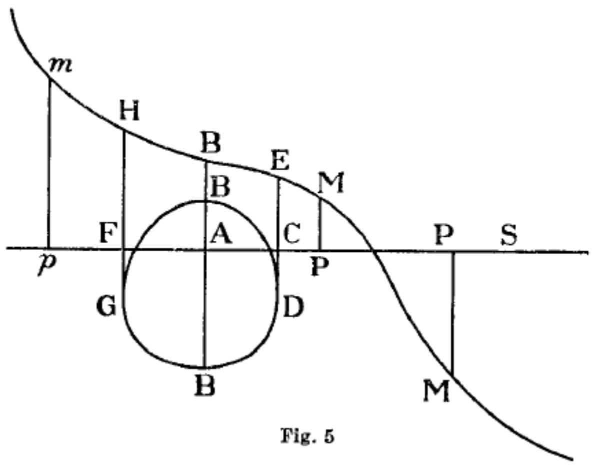


Fig. 5

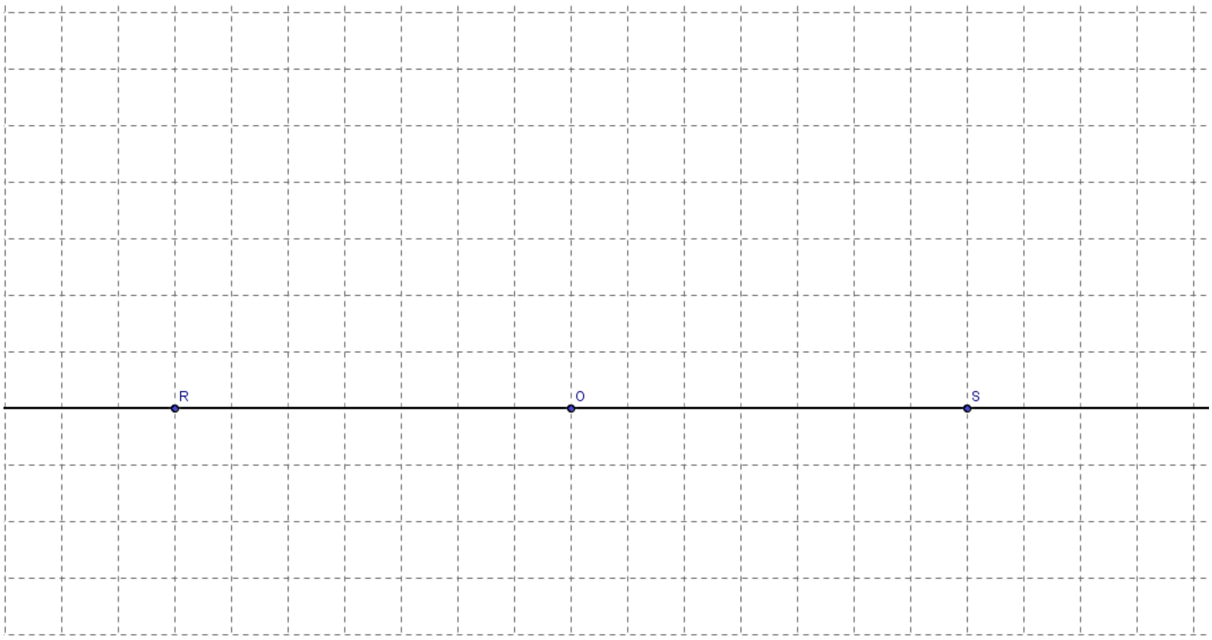
Bei den Figuren vier und fünf handelt es sich um dreiwertige Funktionen, da einem gewissen x-Wert drei y-Werte zugeordnet werden, sodass die zugehörige Applikate die Kurve in drei Punkten schneidet.

Zusatzaufgabe: Stellen Sie eine Vermutung darüber auf, welches Kriterium eine Funktion erfüllen muss, um in Eulers Augen als eine ‚vierwertige Funktion‘ (*quadriformis functio*) zu gelten.

Eine Funktion gilt in Eulers Augen genau dann als vierwertig, wenn einem gewissen x-Wert vier y-Werte zugeordnet werden, sodass die zugehörige Applikate die Kurve in vier Punkten schneidet.

<u>1. Arbeitsauftrag:</u> Sei RS eine Achse und der Punkt O der Ursprung der Abszissen. Zeichnen Sie zunächst folgende Punkte ein!

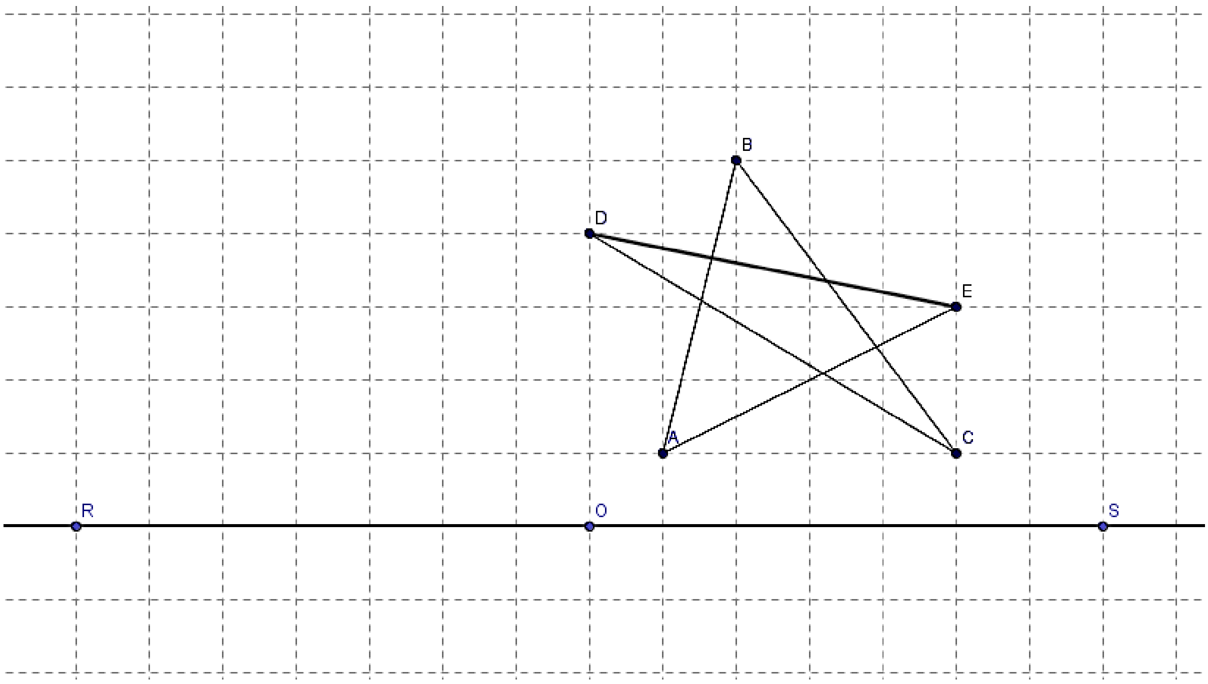
Punkt A:	Abszisse: 1	Applikate: 1
Punkt B:	Abszisse: 2	Applikate: 5
Punkt C:	Abszisse: 5	Applikate: 1
Punkt D:	Abszisse: 0	Applikate: 4
Punkt E:	Abszisse: 5	Applikate: 3



<u>2. Arbeitsauftrag:</u> Verbinden Sie nun die eingezeichneten Punkte wie folgt: ABCDEA. Welche Form ergibt sich?

<u>1. Arbeitsauftrag:</u> Sei RS eine Achse und der Punkt O der Ursprung der Abszissen. Zeichnen Sie zunächst folgende Punkte ein!

Punkt A:	Abszisse: 1	Applikate: 1
Punkt B:	Abszisse: 2	Applikate: 5
Punkt C:	Abszisse: 5	Applikate: 1
Punkt D:	Abszisse: 0	Applikate: 4
Punkt E:	Abszisse: 5	Applikate: 3

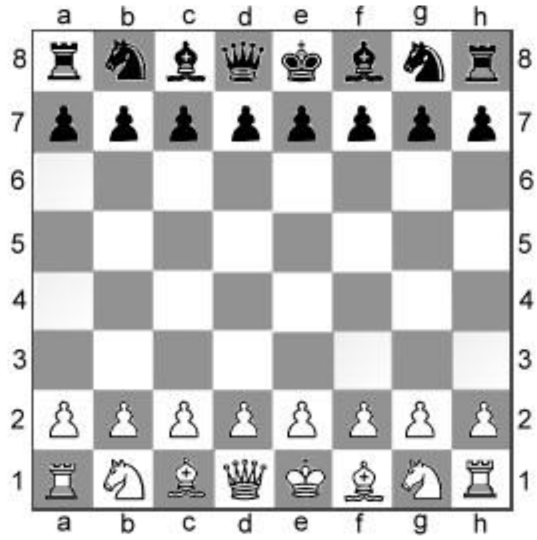


<u>2. Arbeitsauftrag:</u> Verbinden Sie nun die eingezeichneten Punkte wie folgt: ABCDEA. Welche Form ergibt sich?

Ein Stern.

Spielanleitung:

Spieleranzahl: 2
Material: Schachspiel, zwei Notizblöcke



Zunächst einigen sich die beiden Spieler darauf, welcher Spieler mit den weißen und welcher mit den schwarzen Spielfiguren spielt. Anschließend wird jedem Spieler ein Notizblock ausgehändigt. Der Unterschied zu den bekannten Schachregeln besteht darin, dass ein Spieler seinen Spielzug nicht selbstständig ausführt, sondern diesen auf seinem Notizblock festhält und vom Gegenspieler ausführen lässt. Dabei sollen die Spielzüge folgendermaßen festgehalten werden:

Spieler A notiert z.B. auf seinem Notizblock:

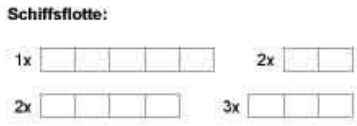
Springer von ‚Abszisse b, Applikate 8‘ nach ‚Abszisse c, Applikate 6‘

Spieler B führt den von Spieler A notierten Spielzug aus. Dann ist Spieler B an der Reihe, einen Spielzug auf seinem Notizblock festzuhalten. Wichtig dabei ist, dass die Spielzüge immer von der Form

„Spielfigur von Abszisse __, Applikate __ nach Abszisse __, Applikate__“

sind. In obenstehender Skizze liegt dabei der Ursprung der Abszissen unten links.

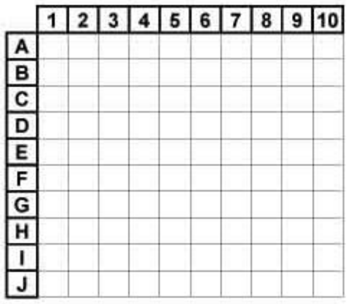
<u>Spielanleitung:</u>

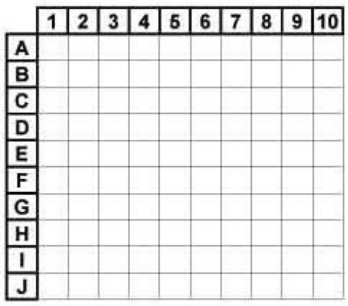


Spieleranzahl: 2

Material: 1 AB pro Spieler

Bei dem Spiel ‚Schiffe versenken' raten die beiden Spieler abwechselnd, an welcher Stelle des Spielfeldes die oben dargestellte Schiffsflotte des Mitspielers zu finden ist. Das nebenstehende Raster ist dabei deswegen in zwei Ausführungen abgebildet, da in der oberen die Lage der eigenen Schiffe und in der unteren die richtigen und falschen Treffer über die Lage der Schiffe des Mitspielers notiert werden. Dabei werden die Stellen mit den Angaben am Rand bezeichnet und müssen immer in folgender Weise erfragt werden:





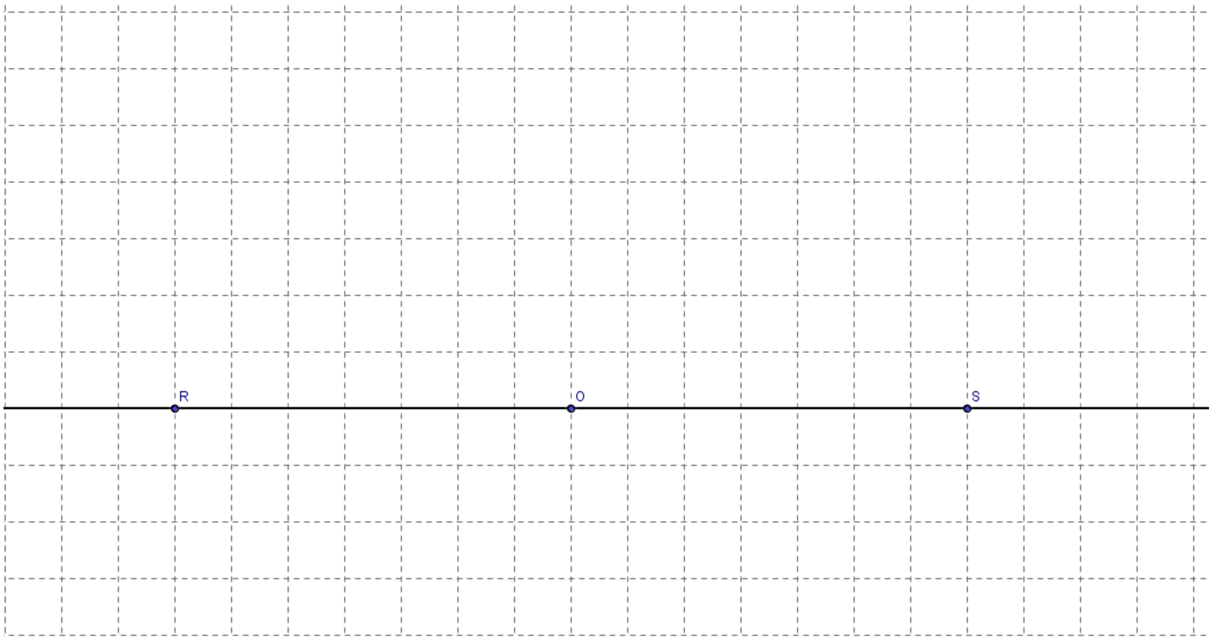
„Treffer bei Abszisse ___, Applikate ____?" z.B. „Treffer bei Abszisse 3, Applikate J"?

Der Ursprung der Abszissen befindet sich also oben links.

Viel Spaß bei der Schiffsjagd!

1. Arbeitsauftrag: Es sei RS eine Achse und O der Ursprung der Abszissen. Tragen Sie zunächst folgende Punkte in die untenstehende Abbildung ein.

Punkt A:	Abszisse: 1	Applikate: 1
Punkt B:	Abszisse: 1	Applikate: 5
Punkt C:	Abszisse: 4	Applikate: 1
Punkt D:	Abszisse: 4	Applikate: 5
Punkt E:	Abszisse: 4	Applikate: 4
Punkt F:	Abszisse: 4	Applikate: 2
Punkt G:	Abszisse: 3	Applikate: 5
Punkt H:	Abszisse: 5	Applikate: 1
Punkt I:	Abszisse: 2	Applikate: 3
Punkt J:	Abszisse: 4	Applikate: 3



2. Arbeitsauftrag: Wenn Sie nun folgende Punkte miteinander verbinden, ergibt jede Buchstabenkombination einen Buchstaben:

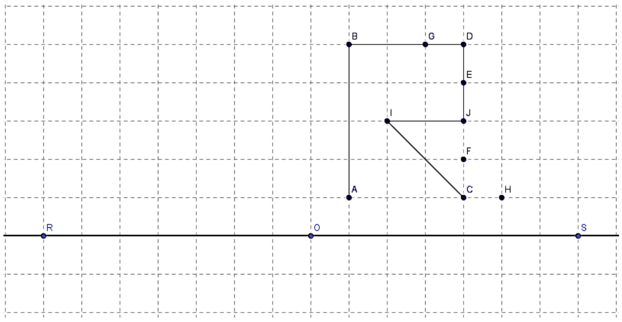
ABDJIC; AGHJI; ABEFA; AB; ABDC

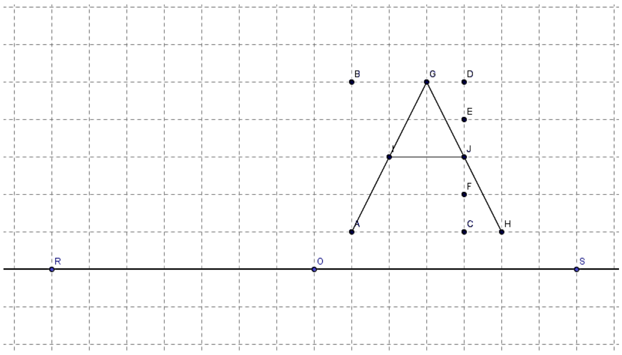
Welches Wort ergibt sich?

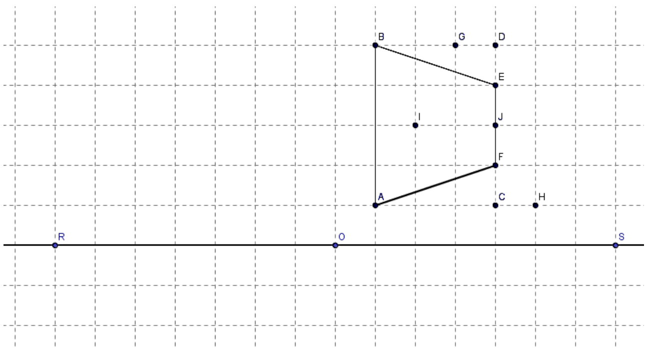
1. Arbeitsauftrag: Es sei RS eine Achse und O der Ursprung der Abszissen. Tragen Sie zunächst folgende Punkte in die untenstehende Abbildung ein.

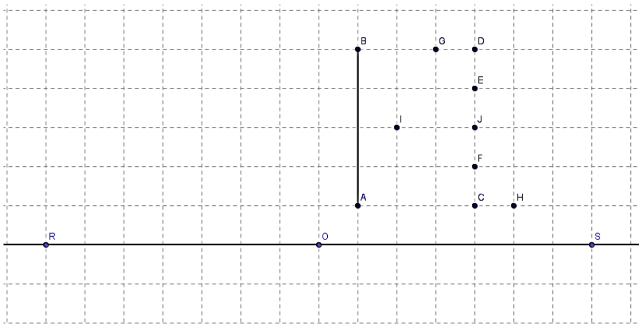
Punkt A:	Abszisse: 1	Applikate: 1
Punkt B:	Abszisse: 1	Applikate: 5
Punkt C:	Abszisse: 4	Applikate: 1
Punkt D:	Abszisse: 4	Applikate: 5
Punkt E:	Abszisse: 4	Applikate: 4
Punkt F:	Abszisse: 4	Applikate: 2
Punkt G:	Abszisse: 3	Applikate: 5
Punkt H:	Abszisse: 5	Applikate: 1
Punkt I:	Abszisse: 2	Applikate: 3
Punkt J:	Abszisse: 4	Applikate: 3

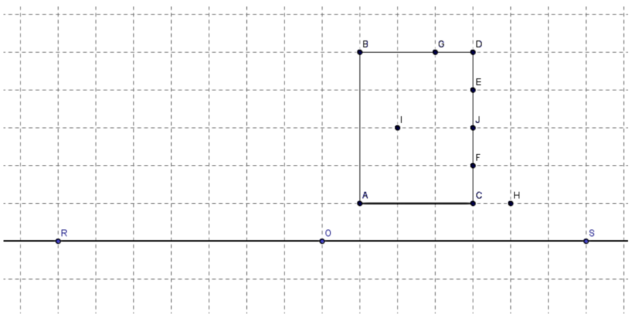
2. Arbeitsauftrag: Wenn Sie nun folgende Punkte miteinander verbinden, ergibt jede Buchstabenkombination einen Buchstaben:
ABDJIC; AGHJI; ABEFA; AB; ABDC
Welches Wort ergibt sich?











5 Zusammenfassung

Wie aus der Kurzbiographie des Mathematikers und auch aus der ersten Station der Projektwoche zu entnehmen ist, beruht das ‚Phänomen' Leonhard Euler einerseits auf einer überaus umfangreichen Produktion von rund 900 Abhandlungen und Büchern, wobei Eulers Arbeitswille selbst durch den Verlust seines Augenlichts nicht gemindert werden konnte. Andererseits zeichnet sich der selbstlose, gerechte und unkomplizierte Mathematiker durch eine gewaltige Konzentrationsfähigkeit, stete und ruhige Arbeit und ein erstaunliches Gedächtnis aus, das in der Geschichte aller Mathematiker seinesgleichen sucht. Auch für seine Hartnäckigkeit und seine leicht aufbrausende Art, aber auch für seine strenge Religiosität war Euler bei seinen Zeitgenossen bekannt. All diese Charaktereigenschaften, die Euler als einen überaus angenehmen Zeitgenossen erscheinen lassen, und seine zahlreichen Entdeckungen bewirkten, dass Leonhard Euler als einer der größten Mathematiker aller Zeiten in die Geschichte einging.

Zu seinen wichtigsten Werken zählt auch sein Lehrbuch *Introductio in analysin infinitorum*, dessen erstes Kapitel des zweiten Bandes im Rahmen der vorliegenden Masterarbeit untersucht worden ist. Ebenso wie in seinen anderen beiden Lehrbüchern wird aus den Analysen zu diesem ersten Kapitel *De lineis curvis in genere* der pädagogische Charakter seiner Schrift ersichtlich. Auch dieser didaktische Auftrag, den Euler mit seinen Lehrbüchern verfolgte, bestätigt den Eindruck von einem ‚Phänomen' Leonhard Eulers, zumal die Abhandlungen des Mathematikers sich auf keine direkten pädagogischen Vorlagen stützen. Vielmehr trug Euler zu der Entstehung einer neuen literarischen Gattung bei und machte so die Mathematik für interessierte Leserinnen und Leser zugänglich, indem er sie an seinen Entdeckungen und auch an seinen Fehlern schrittweise teilhaben ließ.

Um auch die heutige Mathematikgeneration an dem ‚Phänomen' Leonhard Eulers teilhaben zu lassen, wurde eine viertägige Projektwoche geplant, die sich mit dem Kapitel *De lineis curvis in genere* des zweiten Bandes von Eulers *Introductio* befasst. Von den teilnehmenden Schülerinnen und Schülern erfordert diese Projektwoche dabei nicht nur ein Interesse für die Übersetzung lateinischer Texte mit mathematischem Inhalt, sondern auch Begeisterung für mathematische Problemstellungen, die über den gängigen Unterrichtsstoff hinausgehen. So bieten diese vier Projekttage den teilnehmenden Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit, sich zum einen mit der Übersetzung eines lateinischen Originaltextes aus dem achtzehnten Jahrhundert und zum anderen mit wissenschaftlichem Denken und Arbeiten in Form von Definitionen und verschiedenen graphischen Darstellungen auseinanderzusetzen. Die Schülerinnen und Schüler machen sich mit der mathematischen Forschung aus dem achtzehnten Jahrhundert vertraut, die nicht nur die Herausforderung der Übersetzung des lateinischen Originaltextes, sondern auch solche Schwierigkeiten birgt, die die Sprache eines vergangenen Jahrhunderts mit sich bringt. Zudem erfahren die Teilnehmer anhand von Konstruktionsprotokollen und Knobelaufgaben, wie sie selbstständig Informationen aus dem lateinischen Originaltext gewinnen und Definitionen auf bestimmte Sachverhalte anwenden können. Eigenständig sollen sie sich mit dem Lösen von Problemaufgaben beschäftigen und die Arbeitsschritte des Schweizers verinnerlichen, wie an der Zusatzaufgabe über vierwertige Funktionen an der zwölften Station deutlich wird. Auch werden sie mit ihnen bekannten Alltagssituationen konfrontiert. Derartige auf die Lebenswelt der Schüler bezogene Aufgabenstellungen thematisieren besonders die letzten vier Stationen der Projektwoche. So beschäftigen sich die Schülerinnen und Schüler an der dreizehnten und der sechszehnten Station mit einer auf Eulers Ausführungen bezogene Abwandlung des Spiels ‚Malen nach Zahlen'. An den beiden Stationen vierzehn und fünfzehn werden die Teilnehmer mit einer modifizierten Form des Schachspielens bzw. des Spieles ‚Schiffe versenken' konfrontiert.

Demnach wurden im Rahmen der Projektwoche durch die Auseinandersetzung mit Eulers Kapitel *De lineis curvis in genere* vorrangig drei Lernziele verfolgt:

1.) Die teilnehmenden Schülerinnen und Schüler sollen die Geometrie und die Grundlagen des wissenschaftlichen Denkens und Arbeitens kennenlernen.
2.) Die Teilnehmer verinnerlichen geometrische Probleme und erarbeiten einen Lösungsweg.
3.) Die Schülerinnen und Schüler werden mit Situationen aus ihrer Lebenswelt konfrontiert.

Leonhard Euler – ein phänomenaler Mathematiker des achtzehnten Jahrhunderts, der auch im heutigen einundzwanzigsten Jahrhundert wegen seiner enormen Leistungen gewürdigt und anerkannt werden sollte. Insbesondere der zweite Band seiner *Introductio in analysin infinitorum* verdient es, von den Forschern berücksichtigt und geschätzt zu werden, da hier – wie an der vorgestellten Projektwoche ersichtlich – für den heutigen Schulunterricht überaus wertvolle Ergebnisse zu finden sind.

Literaturverzeichnis

Primärliteratur

Blanton, J. D. (Hrsg.), Euler. Introduction to Analysis of the Infinite. Book I (New York 1988).

Blanton, J. D. (Hrsg.), Euler. Introduction to Analysis of the Infinite. Book II (New York 1990).

Krazer, A. – F., Rudio. (Hrsg.), Leonhardi Euleri. Introductio in analysin infinitorum. Tomus primus = Leonhardi Euleri opera omnia Vol. 8 (Karlsruhe und Zürich 1922).

Labey, J. B. (Hrsg.), Introduction a l'analyse infinitésimale – Tome second (Paris 1835).

Speiser, A. (Hrsg.), Leonhardi Euleri. Introductio in analysin infinitorum. Tomus secundus = Leonhardi Euleri opera omnia Vol. 9 (Lipsiae 1945).

Sekundärliteratur

Boyer, C. B., History of analytic geometry (New York 1956).

Coolidge, J. L. (Hrsg.), A history of geometrical methods (New York 1963).

Demmig, R., (Hrsg.) Von Koordinaten bis Funktionsgleichungen = Mathematik. Lehr- und Lernbuch in Teilen auch zum Selbstunterricht geeignet Vol. 4 (Darmstadt-Eberstadt 1965).

Fellmann, E. A., Ein Essay über Leben und Werk, in: Leonhard Euler 1707-1783: Beitraege zu Leben und Werk (1983) 13-98.

Fellmann, E. A. (Hrsg.), Leonhard Euler (Reinbek bei Hamburg 1995).

Fried, M. N., Apollonius of Perga’s „Conica“. text, context, subtext (Leiden 2001).

Fueter, R. (Hrsg.), Leonhard Euler (Basel 1948).

Gelfand, I. M., Glagoleva E. G. – A. A. Kirillov (Hrsgg.), Die Koordinatenmethode (Leipzig 1968).

Gelfond, A. O, Über einige charakteristische Züge in den Ideen L. Eulers auf dem Gebiet der mathematischen Analysis und seiner ‚Einführung in die Analysis des Unendlichen‘, in: Leonhard Euler 1707-1783: Beitraege zu Leben und Werk (1983) 99-110.

Gottfried, T. (Hrsg.), Analyse spezifischer Anforderungen im Mathematikunterricht zur linearen Algebra, analytischen Geometrie (Hamburg 1994).

Hayman, W. K. (Hrsg.), Multivalent functions (Cambridge 1967).

Hofmann, J. E. (Hrsg.), Geschichte der Mathematik. Band 1: Von den Anfängen bis zum Auftreten von Fermat und Descartes (Berlin 1963).

Hofmann, J. E. (Hrsg.), Geschichte der Mathematik. Band 2: Von Fermat und Descartes bis zur Erfindung des Calculus und bis zum Ausbau der neuen Methoden (Berlin 1957).

Hofmann, J. E. (Hrsg.), Geschichte der Mathematik. Band 3: Von den Auseinandersetzungen um den Calculus bis zur Französischen Revolution (Berlin 1957).

Janka, W. (Hrsg.), Analytische Geometrie und lineare Algebra (Stuttgart, Düsseldorf und Leipzig 2003).

Jung, H. W. E. (Hrsg.), Einführung in die Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen (Berlin 1923).

Knobloch, E. (Hrsg.), Zum Werk Leonhard Eulers: Vortraege d. Euler-Kolloquiums im Mai 1983 in Berlin (Basel, Boston und Stuttgart 1984).

Kratzer, A. – W. Franz (Hrsgg.), Transzendente Funktionen (Leipzig 1963).

Kropp, G. (Hrsg.), Geschichte der Mathematik. Probleme und Gestalten (Heidelberg 1969).

Lehmann, I. – W. Schulz (Hrsgg.) Mengen – Relationen – Funktionen. Eine anschauliche Einführung (Wiesbaden 2007).

Lind, D (Hrsg.), Koordinaten, Vektoren, Matrizen. Einführung in die lineare Algebra und analytische Geometrie (Heidelberg 1997).

Mainzer, K. (Hrsg.), Geschichte der Geometrie (Mannheim 1980).

Scriba, C.J. – P. Schreiber (Hrsgg.), 5000 Jahre Geometrie. Geschichte Kultur Menschen (Berlin und Heidelberg 2010).

Thiele, R. (Hrsg.), Leonhard Euler (Leipzig 1982).

Volkert, K., Die Geschichte der pathologischen Funktionen – Ein Beitrag zur Entstehung der mathematischen Methodologie, in: Archive of History of Exact Sciences 37 (1987) 193-232.

Weigand, H.-G. (Hrsg.), Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I + II (Berlin und Heidelberg 2014).

Youschkevitch, A. P., The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century, in: Archive for History of Exact Sciences 16 (1976) 37-85.

Nachschlagewerk:

Walz, G. (Hrsg.), Lexikon der Mathematik (Heidelberg 2001ff.).

Name, Vorname: ……………………………………………………………………

Anschrift ……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

E r k l ä r u n g

gem. § 20 Abs. 9 PO

Hiermit erkläre ich, dass ich die von mir eingereichte Abschlussarbeit (Master-Thesis) selbständig verfasst, keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt sowie die Stellen der Abschlussarbeit, die anderen Werken dem Wortlaut oder Sinn nach entnommen wurden, in jedem Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht habe. Entsprechendes gilt für beigegebene Zeichnungen, Kartenskizzen und Darstellungen.
Sollten entsprechend der Themenstellung ggf. Vorarbeiten des Forschungsprojektes in die Abschlussarbeit eingeflossen sein, so habe ich dieses gekennzeichnet bzw. als Anhang nachgewiesen.

………………………………. ……………………………

Datum Unterschrift

E r k l ä r u n g

Hiermit erkläre ich mich damit einverstanden, dass meine Abschlussarbeit (Master-Thesis) wissenschaftlich interessierten Personen oder Institutionen zur Einsichtnahme zur Verfügung gestellt werden kann.
Korrektur- oder Bewertungshinweise in meiner Arbeit dürfen nicht zitiert werden.

………………………………. ……………………………

Datum Unterschrift